PIMA
Projects in Mathematics and Applications

2016, August (18 trang)

Graph Theory

Hồ Quốc Đăng Hưng

University of Chicago, USA

Subject Index Graph theory.

Giới thiệu

1. Đồ thị và biểu diễn bằng đồ thị

1.1. Một số định nghĩa và ví dụ cơ bản

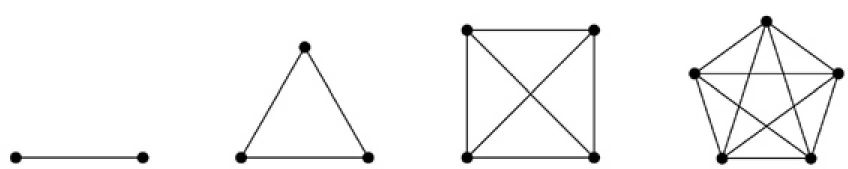
Nhiều vấn đề trong thực tế có thể được biểu diễn khá tiện lợi dưới dạng mô hình các điểm trên mặt phẳng kết hợp với các đoạn thẳng nối một số cặp điểm nhất định. Chẳng hạn, tập hợp điểm của ta có thể đại diện cho học sinh trong một ngôi trường và các đoạn thẳng nối hai điểm tương ứng với hai học sinh quen biết nhau. Với hai điểm bất kì trong mô hình này, chúng ta chỉ quan tâm chúng có được nối với nhau hay không, chứ không quan tâm chúng được nối với nhau như thế nào. Đây chính là cơ sở để hình thành khái niệm đồ thị trong toán học. (lưu ý: tránh nhầm lẫn với khái niệm đồ thị của hàm số)

Đồ thị là một phương thức biểu diễn toán học của một mối quan hệ. Cụ thể hơn, một *đồ thị* G bao gồm hai tập hợp-tập hợp **đỉnh** $V(G)$ (chính là các điểm được mô tả ở trên) và tập hợp **cạnh** $E(G)$ (là các đoạn thẳng nối một số cặp điểm). Nếu e là một cạnh của đồ thị G nối hai đỉnh u và v thì ta nói u **liên thuộc** với e, và u và v **kề nhau**. Thông thường, ta kí hiệu $e = uv$ (lưu ý rằng ta không phân biệt giữa hai cách viết uv hay vu). Số các đỉnh kề với đỉnh v được goi là **bậc** của v và kí hiệu $\deg v$. Tổng số đỉnh của một đồ thị G được gọi là **bậc** của đồ thị, và kí hiệu $\deg G$.

1.2. Một số lớp đồ thị quan trọng

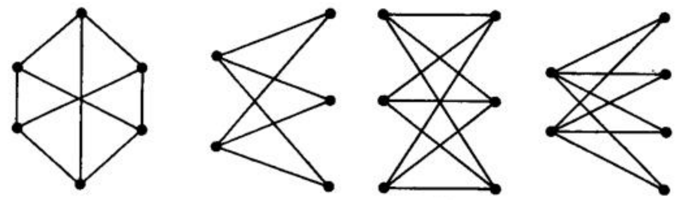
Đồ thị đầy đủ (complete graph)

Một đồ thị G được gọi là đầy đủ nếu như hai đỉnh bất kì đều kề nhau.



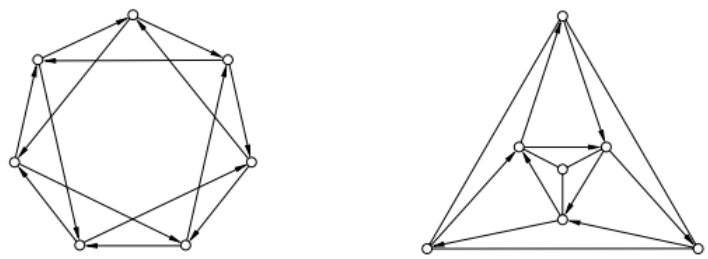
Đồ thị hai phe (bipartite graph)

Một đồ thị G được gọi là **hai phe** nếu như tập đỉnh $V(G)$ có thể được phân hoạch thành hai tập X và Y sao cho mỗi cạnh của G nối một đỉnh của X với một đỉnh của Y. Để cho đơn giản, ta kí hiệu một đồ thị hai phe G với cách phân hoạch $V = \{X, Y\}$ là $G(X, Y)$.



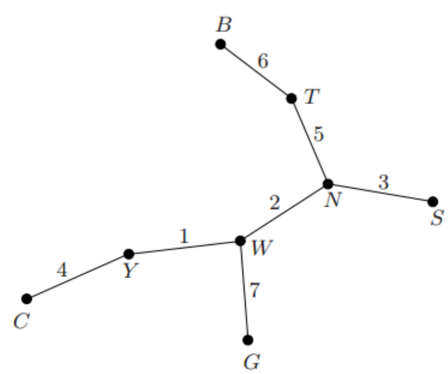
Đồ thị có hướng (directed graph)

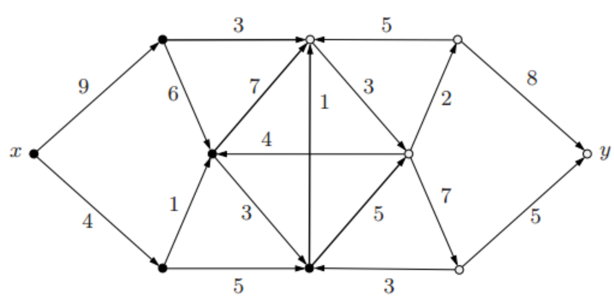
Một **đồ thị có hướng** D bao gồm tập hợp điểm V và tập hợp **cung** A (hay **cạnh có hướng**). Một cung $e = xy$ được gọi là có hướng **từ** x **tới** y, và x được gọi là **đỉnh đầu/gốc**, y được gọi là **đỉnh cuối/ngọn** của cung. Lưu ý rằng trong đồ thị có hướng, hai cách viết $e = xy$ hay $e = yx$ là khác nhau. Với mỗi đỉnh x thuộc $V(D)$, ta gọi **bậc ngoài** của x là số các đỉnh $y \in V(D) \setminus x$ sao cho tồn tại cung từ x tới y, và **bậc trong** của x là số các đỉnh $y \in V(D) \setminus x$ sao cho tồn tại cung từ y tới x.



Đồ thị có trọng số (weighted graph)

Một đồ thị được gọi là **có trọng số** nếu như mỗi cạnh của đồ thị đó được cho tương ứng với một đại lượng (tùy vào từng trường hợp mà các đại lượng có thể được cho không âm, dương, là số nguyên,...).



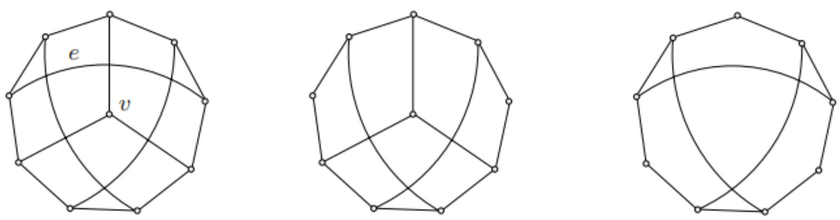


1.3. *Đồ thị con*

Cho đồ thị G với tập đỉnh $V(G)$, tập cạnh $E(G)$. Đồ thị H với tập đỉnh $V(H)$ và tập cạnh $E(H)$ được gọi là **đồ thị con** của G nếu như $V(H)$ là tập con của $V(G)$ vả $E(H)$ là tập con của $E(G)$.
Để thu được một đồ thị con H từ đồ thị G ban đầu, có hai phương pháp thông thường:

(1) Xoá cạnh: xoá đi một số cạnh của G và giữ nguyên tập đỉnh. Kí hiệu: cho $E^* \subseteq E(G)$, khi đó ta kí hiệu đồ thị con thu được bằng cách xóa các cạnh thuộc E^* là $G \setminus E^*$.
(2) Xoá đỉnh: xoá đi một số đỉnh và tất cả các cạnh kề với các đỉnh bị xoá. Kí hiệu: cho $V^* \subseteq E(G)$, khi đó ta kí hiệu đồ thị con thu được bằng cách xóa các cạnh thuộc V^* là $G - V^*$.

Đồ thị con thu được từ phương pháp 1 được goi là **đồ thị con bao trùm**. Nói cách khác, đồ thị con bao trùm có cùng tập đỉnh với đồ thị ban đầu.
Đồ thị con thu được từ phương pháp 2 được gọi là **đồ thị con cảm sinh**.



G $\quad$ $G \setminus e$ $\quad$ $G - v$

Đồ thị liên thông

2. Một số khái niệm quan trọng

2.1. *Đường đi*

Một **đường đi** trong đồ thị G là một dãy xen kẽ các đỉnh và cạnh $W := v_0e_1v_1 \dots v_{l-1}e_lv_l$ (không nhất thiết phân biệt), trong đó v_{i-1} và v_i là các đầu mút của cạnh e_i, $1 \leq i \leq l$. Nếu $v_0 = x$ và $v_l = y$, ta nói W là một *đường đi* xy, trong đó x được gọi là *đỉnh đầu*, y được gọi là *đỉnh cuối* của đường đi.
Thông thường, trong đồ thị đơn vô hướng, đường đi $W := v_0e_1v_1 \dots v_{l-1}e_lv_l$ có thể được viết ngắn gọn là $v_0v_1 \dots v_l$.
Hai đỉnh x và y được gọi là **liên thông** nếu và chỉ nếu tồn tại một đường đi xy. **Đồ thị liên thông** là đồ thị mà hai đỉnh bất kì đều liên thông.
(ví dụ minh họa)

2.2. *Chu trình*

Chu trình là một đường đi có đỉnh đầu và đỉnh cuối trùng nhau, đồng thời các cạnh xen giữa đôi một khác nhau. Cụ thể, $W := v_0e_1v_1 \dots v_{l-1}e_lv_l$ là một chu trình khi và chỉ khi $v_0 = v_l$ và $e_1, e_2, \dots, e_l$ đôi một khác nhau.
(ví dụ minh họa)

2.3. *Liên thông trong đồ thị có hướng*

Các khái niệm về đường đi, liên thông, chu trình trong đồ thị có hướng được định nghĩa tương tự. Một **đường đi có hướng** trong một đồ thị có hướng D là một dãy xen kẽ các đỉnh và cung $W := v_0a_1 \dots v_{l-1}a_lv_l$, trong đó với mỗi $1 \leq i \leq l$, v_{i-1} là gốc và v_i là ngọn của a_i. Nếu $v_0 = x$ và $v_l = y$, ta gọi W là một **đường đi có hướng** xy. (lưu ý: trong đồ thị có hướng, đường đi xy khác với đường đi yx.)
Ta nói y **tới được** từ x nếu như có một đường đi có hướng xy. Một đồ thị có hướng D được gọi là **liên thông mạnh** nếu như với hai đỉnh x và y bất kì, tồn tại cả đường đi xy lẫn đường đi yx.

2.4. *Thành phần liên thông*

Trong đồ thị đơn vô hướng G, **thành phần liên thông** C là một đồ thị con cảm sinh của G thoả mãn hai tính chất:

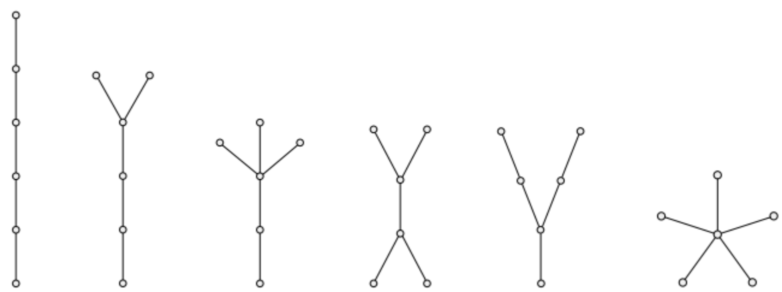
(1) C là một đồ thị liên thông.
(2) Nếu ta thêm một đỉnh bất kì của $V(G) \setminus V(C)$ vào C thì C không còn liên thông. Hay nói cách khác, C là một đồ thị liên thông cực đại (maximal).

Một đồ thị liên thông chỉ có đúng một thành phần liên thông (là chính nó). Một đồ thị không liên thông có ít nhất hai thành phần liên thông. Ngoài ra, hiển nhiên là các thành phần liên thông của một đồ thị đôi một rời nhau. Như vậy, một đồ thị bất kì có thể được phân hoạch thành các thành phần liên thông.
Khái niệm **thành phần liên thông mạnh** được định nghĩa tương tự trong đồ thị có hướng. Cũng như trong đồ thị vô hướng, một đồ thị có hướng có thể được phân hoạch thành các

thành phần liên thông mạnh.

2.5. Cây

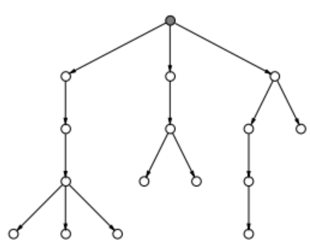
Cây là một đồ thị liên thông và không có chu trình. Một đỉnh của cây có bậc một được gọi là **lá**.



Tính chất.

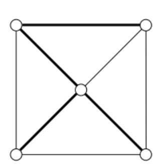
(1) Trong một cây, giữa hai đỉnh bất kì có đúng một đường đi.
(2) Một cây luôn có ít nhất hai lá.
(3) Một cây có n đỉnh thì có $n-1$ cạnh.

Cây (có gốc) là cây trong đó có một đỉnh được chọn là gốc và mỗi cạnh được định hướng trùng với hướng đi của đường đi đơn duy nhất từ gốc tới mỗi đỉnh.



Trong một cây có gốc, nếu có một cạnh đi từ đỉnh x đến đỉnh y thì đỉnh x được gọi là cha của đỉnh y và y là con của x.

Cây bao trùm của một đồ thị là một đồ thị con bao trùm, đồng thời là một cây.



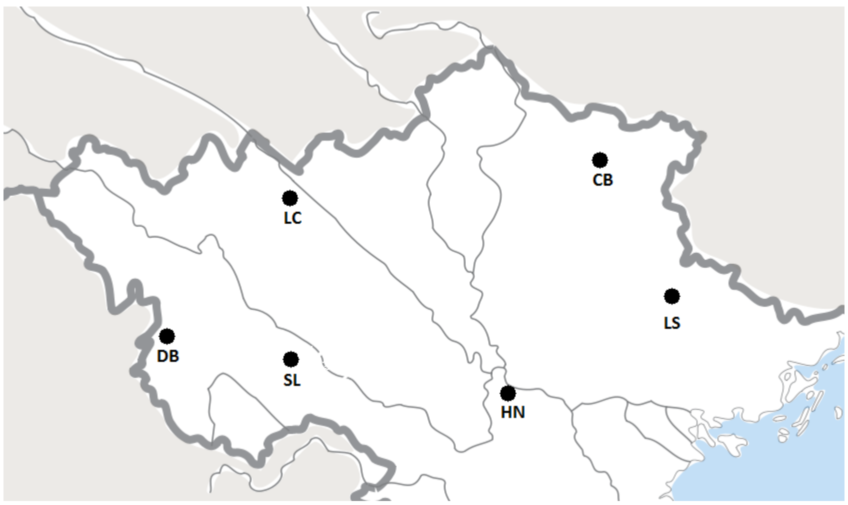
ĐỊNH LÍ
Một đồ thị liên thông khi và chỉ khi nó có một cây bao trùm.

ĐỊNH LÍ
Một đồ thị hai phe khi và chỉ khi nó không có một chu trình lẻ (một chu trình gồm một số lẻ đỉnh).

3. Một số thuật toán quan trọng

3.1. Thuật toán Jarnik-Prim

Các kĩ sư của PiMA cần thiết lập một hệ thống đường dây điện ở Việt Nam, kết nối các thành phố Hà Nội, Cao Bằng, Lạng Sơn, Lào Cai, Điện Biên đến Nhà máy thủy điện Sơn La. Vị trí và khoảng cách giữa các thành phố được thể hiện qua sơ đồ sau. Hỏi làm thế nào để xây dựng được một đường dây với tổng khoảng cách kết nối là ngắn nhất?



	HN	SL	CB	LS	DB	LC
HN	0	217	187	127	295	228
SL	–	0	311	312	101	144
CB	–	–	0	95	337	219
LS	–	–	–	0	364	261
DB	–	–	–	–	0	123
LC	–	–	–	–	–	0

Ta có thể đưa bài toán trên về dạng một đồ thị có trọng số với các đỉnh tương ứng với các thành phố (HN, SL, CB, LS, DB, LC). Ta cần tìm một đồ thị con bao trùm và liên thông với tổng các trọng số là nhỏ nhất. Bởi vì các trọng số tương ứng với khoảng cách giữa hai thành phố, là các số dương, nên đồ thị con cần tìm là một cây bao trùm. Bài toán trên là một trường hợp cu thể của bài toán tìm cây bao trùm có tổng trọng số nhỏ nhất trong một đồ thị liên thông có trọng số.

Trong thuật toán này, ta chọn một đỉnh bất kì làm gốc (root) của cây T. Gọi $\overline{E}(T)$ là tập hợp các cạnh có một đầu mút thuộc T nhưng bản thân cạnh đó không thuộc T. Ở mỗi bước, ta thêm vào T cạnh có trọng số nhỏ nhất trong $\overline{E}(T)$. Ta tô màu các đỉnh của T, và ở mỗi bước thì với mỗi đỉnh v chưa được tô màu, ta sẽ gán cho một giá trị $c(v)$, chính là trọng số nhỏ nhất của cạnh nối v với một đỉnh u đã được tô màu. Sau đó, ta chọn u làm cha của v và đặt hàm predecessor $p(v) = u$). Lưu ý rằng ban đầu mỗi đỉnh có giá trị là vô cùng và không có cha. Hai thông số p và c được cập nhật liên tục ở mỗi bước của thuật toán.

THUẬT TOÁN JARNIK-PRIM
input: một đồ thị liên thông có trọng số G.
output: một cây bao trùm của G có tổng các trọng số nhỏ nhất, hàm predecessor p, và trọng lượng của cây $w(T)$ (chính là tổng các trọng số).

(1) cho $p(v) := \emptyset$ và $c(v) := \infty, v \in V$ và $w(T) := 0$
(2) chọn một đỉnh r bất kì làm gốc
(3) $c(r) := 0$
(4) **while** có một đỉnh chưa được tô màu **do**
(5) chọn đỉnh u sao cho $c(u)$ nhỏ nhất
(6) tô màu u
(7) **for** mỗi đỉnh v chưa được tô màu mà $w(uv) < c(v)$ **do**
(8) $p(v) := u$ và $c(v) := w(uv)$
(9) $w(T) := w(T) + c(u)$
(10) **end for**
(11) **end while**
(12) return$(p, w(T))$

Hãy cùng áp dụng thuật toán Jarnik-Prim để giải quyết bài toán đường dây điện nêu trên. Bước 1, ta chọn Sơn La làm gốc, lúc này chưa có đỉnh nào được tô màu. Vì $c(SL) = 0$ và $c(v) = \infty$ với mọi $v \neq SL$, Sơn La chỉnh là đỉnh u được chọn ở bước 5. Tất cả các đỉnh khác nhận SL làm cha. Bây giờ ta lưu ý các giá trị của các đỉnh chưa được tô màu như sau:

$$c(HN) = 217,\ c(CB) = 311,\ c(LS) = 312,\ c(DB) = 101,\ c(LC) = 144$$

Lúc này $w(T)$ vẫn bằng 0.
Dựa vào các giá trị trên, ta sẽ chọn Điện Biên làm đỉnh để tô màu tiếp theo. Hàm predecessor và hàm giá trị thay đổi thành:

$$p(HN) = SL,\ p(CB) = SL,\ p(LS) = SL,\ p(LC) = DB$$

$$c(HN) = 217,\ c(CB) = 311,\ c(LS) = 312,\ c(LC) = 123$$

$$w(T) = 101$$

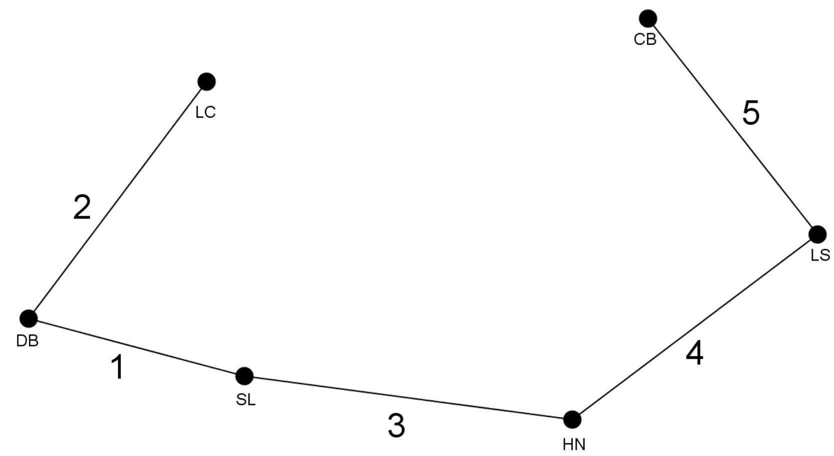
Ta thấy rằng $c(LC)$ là nhỏ nhất trong các giá trị trên, vậy ta chọn Lào Cai làm đỉnh tiếp theo được tô màu. Hàm predecessor và hàm giá trị trở thành:

$$p(HN) = SL,\ p(CB) = LC,\ p(LS) = LC$$

$$c(HN) = 217,\ c(CB) = 219,\ c(LS) = 261$$

$$w(T) = 101 + 123 = 224$$

Cứ tiếp tục quá trình trên cho đến khi tất cả các đỉnh đều được tô màu. Cuối cùng ta sẽ thu được một cây bao trùm có tổng độ dài $w(T) = 663$km. Hình sau đây mô tả thứ tự được chọn của các cạnh và đỉnh.

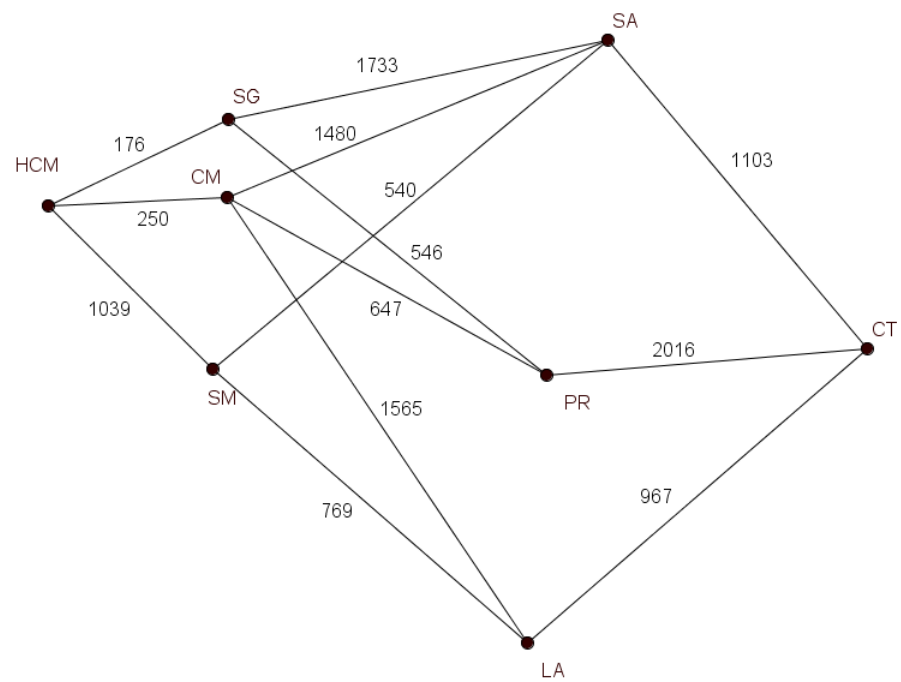


3.2. *Thuật toán Dijkstra và bài toán Đường đi ngắn nhất*

Thầy Dũng muốn tham dự một Hội nghị về Toán mô hình ở Cape Town, Nam Phi. Tuy nhiên, do không có đường bay thẳng từ Thành phố Hồ Chí Minh đến Nam Phi nên thầy Dũng phải quá cảnh ở hai thành phố khác. Dựa vào bảng sau đây, hãy giúp thầy Dũng chọn lộ trình bay ít tốn kém nhất

	HCM	Chiangmai	Singapore	Santa Marta	San Antonio	Los Angeles	Paris	Cape Town
HCM	-	250	176	1039	-	-	-	-
Chiangmai	-	-	-	-	1480	1565	647	-
Singapore	-	-	-	-	1733	-	546	-
Santa Marta	-	-	-	-	540	769	-	-
San Antonio	-	-	-	-	-	-	-	1103
Los Angeles	-	-	-	-	-	-	-	967
Paris	-	-	-	-	-	-	-	2016
Cape Town	-	-	-	-	-	-	-	-

Bài toán trên có thể được đưa về mô hình đồ thị có trọng số một cách rất tự nhiên: dùng các đỉnh để biểu diễn các thành phố và các cạnh có trọng số sẽ tương ứng với giá tiền của các chuyến bay. Như vậy, về cơ bản ta cần tìm đường đi ngắn nhất từ đỉnh HCM đến đỉnh CT của đồ thị sau. (ngắn nhất ở đây được hiểu là đường đi có tổng trọng số nhỏ nhất, tương ứng với lộ trình bay ít tốn kém nhất)



Thuật toán Dijkstra này có nhiều nét tương đồng với thuật toán Jarnik-Prim, đặc biệt là việc áp dụng tư tưởng của thuật toán tham lam. Ta cũng chọn một đỉnh làm gốc rồi sử dụng phép tô màu để đánh dấu các đỉnh đã được chọn.

THUẬT TOÁN DIJKSTRA

input: một đồ thị liên thông có trọng số dương và một đỉnh làm gốc r.

output: hàm predecessor p và hảm khoảng cách ℓ thoả mãn $\ell(v)$ chính là độ dài của đường đi ngắn nhất từ r đến v.

(1) cho $p(v) := \emptyset$ và $\ell(r) := 0, \ell(v) := \infty, v \in V \setminus \{r\}$
(2) **while** có một đỉnh u chưa được tô màu mà $\ell(u) < \infty$ **do**
(3) chọn đỉnh u sao cho $\ell(u)$ nhỏ nhất
(4) tô màu u
(5) **for** mỗi đỉnh v kề với u chưa được tô màu mà $\ell(v) > \ell(u) + w(uv)$ **do**
(6) $p(v) := u$ và $\ell(v) := \ell(u) + w(uv)$
(7) **end for**
(8) **end while**
(9) return(p, ℓ)

Hãy cùng áp dụng thuật toán Dijkstra để giúp thầy Dũng chọn đường bay tốt nhất! Ở đây đương nhiên ta sẽ chọn HCM làm gốc. Bước 2, hiển nhiên chỉ có HCM thoả mãn $\ell(HCM) < \infty$ nên ta chọn và tô màu HCM (xong bước 4). Do $\ell(CM) = \ell(SG) = \infty$ nên ở bước 5 và 6 ta lần lượt gán $p(CM) = p(SG) = HCM$ và $\ell(CM) = w(CM - HCM) = 250, \ell(SG) = w(SG - HCM) = 176$. Đến đây quay lại bước 2.

Để ý rằng chỉ có Chiangmai và Singapore là thoả mãn $\ell < \infty$, và do $\ell(SG) < \ell(CM)$ nên ta chọn Singapore tiếp theo. Xét các đỉnh kề với Singapore, hàm predecessor và hàm khoảng cách trở thành:

$$p(SA) = p(PR) = SG$$

$$\ell(SA) = 176 + 1733 = 1909,\ \ell(PR) = 176 + 546 = 722$$

Lúc này thì có ba đỉnh thoả mãn $\ell < \infty$ là Chiangmai, San Antonio Paris. Dựa vào các giá trị, dễ dàng chọn Chiangmai tiếp theo và cập nhật kết quả:

$$p(LA) = CM$$

Bây giờ chú ý là $\ell(CM) + w(CM - SA) = 1730 < \ell(SA)$ (bay Chiangmai-San Antonio thì rẻ hơn bay Singapore-San Antonio) cho nên ta thay đổi $p(SA) = CM$. Do đó:

$$\ell(LA) = 1565 + 250 = 1815,\ \ell(SA) = 1730$$

Tiếp tục như vậy, $\ell(PR)$ nhỏ nhất trong các giá trị ℓ hữu hạn đang có, cho nên đỉnh tiếp theo được chọn là Paris. p và ℓ được cập nhật:

$$p(CT) = PR,$$

$$\ell(CT) = \ell(PR) + w(PR - CT) = 722 + 2016 = 2738$$

Lặp lại các thao tác trên một vài lần nữa, cuối cùng hàm p và ℓ của ta sẽ trở thành:

$$p(CM) = p(SG) = p(SM) = HCM,\ p(SA) = SM,$$

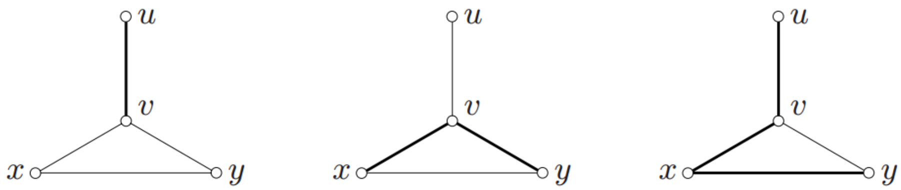
Vậy chuyến bay lí tưởng nhất là HCM-Santa Marta-San Antonio-Cape Town.

Mạng lưới

4. Một số định nghĩa và định lý quan trọng

4.1. *Lát cắt cạnh*

Cho đồ thị G và $X, Y \subset V(G)$ là các tập hợp đỉnh của G (X và Y không nhất thiết rời nhau). Ta kí hiệu $E[X, Y]$ là tập hợp các cạnh của G có một đỉnh thuộc X và đỉnh còn lại thuộc Y. Khi $Y = V(G) \setminus X$, tập hợp $E[X, Y]$ khi đó được gọi là một **lát cắt cạnh** của G ứng với X, và được kí hiệu bởi $\partial(X)$. Đặt $d(X) = |\partial(X)|$ thì $d(X)$ được gọi là **bậc** của tập hợp đỉnh X.



$\partial(u)$ $\partial(u, v)$ $\partial(u, x)$

Trong đồ thị có hướng, ta dùng kí hiệu $A(X, Y)$ để chỉ tập hợp các cung có đỉnh đầu thuộc X và đỉnh cuối thuộc Y. Nếu $Y = V \setminus X$, ta gọi $A(X, Y)$ là **lát cắt ngoài** của D ứng với X và kí hiệu là $\partial^+(X)$. Tương tự như vậy, $A(Y, X)$ được gọi là **lát cắt trong** ứng với X và được kí hiệu $\partial^-(X)$. Rõ ràng $\partial^+(X) = \partial^-(V \setminus X)$. $d^+(X) = |\partial^+(X)|$ được gọi là **bậc ngoài** của X. $d^-(X)$ được định nghĩa tương tự và được gọi là **bậc trong** của X. Nếu $X = \{x\}$ chỉ gồm một đỉnh thì ta chỉ kí hiệu đơn giản $d^+(x)$ và $d^=(x)$.

4.2. *Mạng vận tải*

Cho đồ thị có hướng D. Đỉnh $x \in A(D)$ được gọi là **đỉnh phát** nếu như $d^-(x) = 0$ (x có bậc trong bằng 0), và y được gọi là **đỉnh thu** nếu $d^+(y) = 0$. **mạng lưới** $N := N(x, y)$ là một đồ thị có hướng với đỉnh phát x và đỉnh thu y, cùng với một hàm số c xác định trên tập hợp cung của đồ thị. Các đỉnh khác x và y được gọi là **đỉnh trung gian**, và thường được kí hiệu bởi I (viết tắt của *intermediate vertices*). Hàm số c được gọi là **hàm năng suất** của N và với mỗi cung a thì giá trị $c(a)$ được gọi là **năng suất** (hay **khả năng thông qua**) của a.
Cấu trúc của mạng lưới trong lý thuyết đồ thị có nhiều nét tương đồng với mô hình vận chuyển hàng hóa trong cuộc sống, trong đó x tượng trưng cho nhà sản xuất, y là thị trường tiêu dùng và hàm c thể hiện năng suất vận chuyển.

4.3. *Luồng*

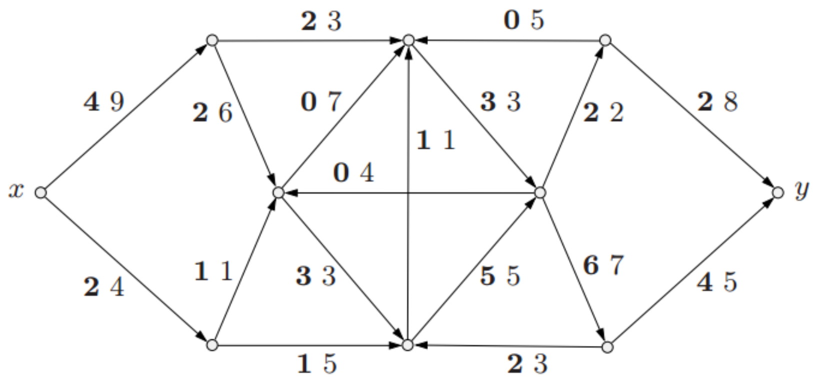
Cho f là một hàm số xác định trên tập hợp cung A của mạng lưới N. Với mỗi $S \subseteq A$, ta kí hiệu tổng $\sum\limits_{a \in S} f(a)$ bởi $f(S)$. Ngoài ra, với mỗi tập hợp đỉnh $X \subseteq V$, ta đặt

$$f^+(X) := f(\partial^+(X)) \text{ và } f^-(X) := f(\partial^-(X))$$

Một **luồng**-(x, y) (hay gọi tắt là **luồng**) trong N là một hàm số thực không âm f xác định trên A thỏa mãn:

(1) $f^+(v) = f^-(v) \; \forall \, v \in I$
(2) $0 \leq f(a) \leq c(a) \; \forall \, a \in A$

Ta có thể hiểu giá trị $f(a)$ là **dung lượng** của luồng qua cung a, và đẳng thức ở 1. nói rằng dung lượng luồng vào một đỉnh trung gian phải bằng dung lượng luồng ra khỏi đỉnh đó. Ngoài ra, một điều kiện quan trọng nữa là dung lượng luồng qua một cung không thể vượt quá năng suất của cung đó (điều kiện 2.).
Mỗi mạng lưới đều tồn tại ít nhất một luồng, ví dụ luồng f xác định bởi $f(a) := 0$ với mọi a. Hình sau đây mô tả một luồng không tầm thường, trong đó dung lượng của luồng qua mỗi cung được tô đậm bên cạnh năng suất của cung đó.



Nếu X là tập hợp một số đỉnh của N và f là một luồng trên N, thì ta gọi $f^+(X) - f^-(X)$ là *dung lượng luồng ra khỏi* X và $f^-(X) - f^+(X)$ là *dung lượng luồng đi vào* X. Không khó để thấy rằng, với mọi luồng-(x, y), dung lượng luồng ra khỏi x bằng dung lượng luồng đi vào y. Ta gọi giá trị của $f^+(x) - f^-(x)$ (hay $f^-(y) - f^+(y)$) là **tổng luồng từ** x **tới** y (hay đơn giản là **tổng luồng**), và được kí hiệu là $\mathrm{val}(f)$ (viết tắt của *value*).
Ta có mệnh đề quan trọng sau đây thể hiện mối quan hệ giữa tổng luồng và một tập đỉnh X bất kì.

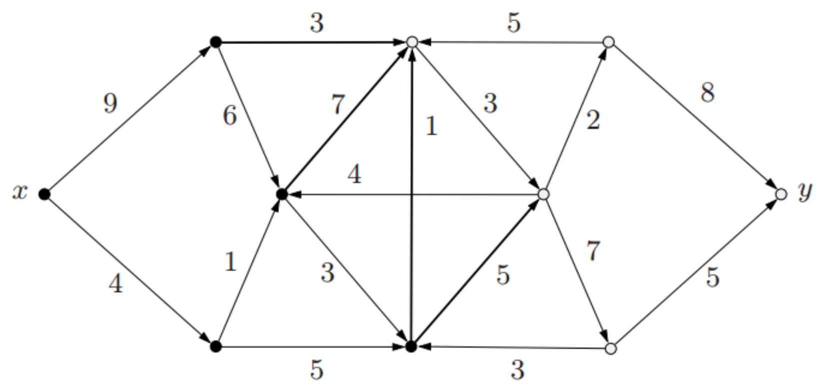
MỆNH ĐỀ 3.1
Với mọi luồng f trong mạng lưới $N(x, y)$ và bất kì tập đỉnh $X \subseteq V$ sao cho $x \in X$ và $y \in V \setminus X$, ta có

$$\mathrm{val}(f) = f^+(X) - f^-(X)$$

Luồng f được gọi là **luồng cực đại** nếu như không tồn tại một luồng nào khác có tổng luồng lớn hơn.

4.4. Lát cắt

Một **lát cắt** trong mạng lưới $N(x, y)$ là một lát cắt ngoài $\partial^+(X)$ sao cho $x \in X$ và $y \in V \setminus X$. **Năng suất** của một lát cắt $K := \partial^+(X)$ là tổng năng suất của các cung thuộc K, và được kí hiệu bởi $\mathrm{cap}(K)$. Trong hình dưới đây, các đường in đậm biểu diễn một lát cắt $\partial^+(X)$, trong đó X là các đỉnh được tô đậm. Năng suất của lát cắt trong hình là 3+7+1+5=16.



Với mỗi cung a, ta gọi a là *rỗng* nếu $f(a) = 0$, *dương* nếu $f(a) > 0$, *bão hòa* nếu $f(a) = c(a)$ và *chưa bão hòa* nếu $f(a) < c(a)$. Định lý sau đây cho ta một quan hệ hết sức quan trọng giữa tổng luồng và năng suất của một lát cắt bất kì.

ĐỊNH LÍ 3.2
Cho luồng f và một lát cắt bất kì $K := \partial^+(X)$ trong mạng lưới N. Khi đó:

$$\text{val}(f) \leq \text{cap}(K)$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tất cả các cung trong K là bão hòa, và tất cả các cung trong $\partial^-(X)$ là rỗng.

Lát cắt K được gọi là **lát cắt cực tiểu** nếu như không tồn tại một lát cắt nào khác trong N có năng suất nhỏ hơn.

HỆ QUẢ 3.3
Cho f là một luồng và K là một lát cắt trong N. Nếu $\text{val}(f) = \text{cap}(K)$ thì f là một luồng cực đại và K là một lát cắt cực tiểu.

4.5. Định lí Luồng cực đại-Lát cắt cực tiểu

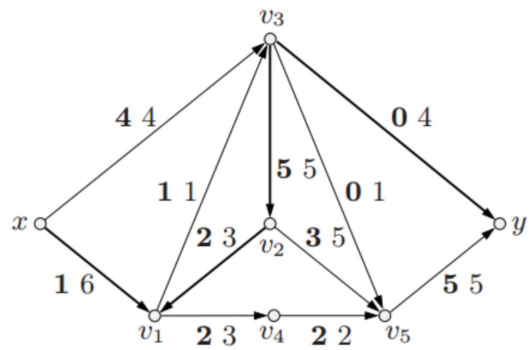
Cho f là một luồng trong $N(x, y)$ và một đường đi P bất kì trong N xuất phát từ x (đường đi này không nhất thiết phải là đường đi có hướng). Với mỗi cạnh $u_i u_{i+1}$ trong P tương ứng với cung a trong N, ta gọi a là *cung thuận* nếu a đi từ u_i tới u_{i+1}, và a là *cung nghịch* nếu ngược lại. Ta gán cho P một giá trị $\epsilon(P)$ định nghĩa như sau:

$$\epsilon(P) := \min\{\epsilon(a) : a \in A(P)\}$$

trong đó

$$\epsilon(a) := \begin{cases} c(a) - f(a) & \text{nếu } a \text{ là cung thuận} \\ f(a) & \text{nếu } a \text{ là cung nghịch} \end{cases}$$

Ý nghĩa của đại lượng $\epsilon(P)$ này là gì? Đây chính là giá trị lớn nhất mà ta có thể tăng vào dung lượng luồng qua P mà không làm ảnh hưởng đến hai điều kiện cơ bản của luồng. Đường đi P được gọi là **bão hòa** nếu $\epsilon(P) = 0$ và **chưa bão hòa** nếu $\epsilon(P) > 0$ (nói cách khác, tất cả cung thuận của P đều chưa bão hòa và tất cả cung nghịch đều dương). Nói một cách đơn giản, một đường đi chưa bão hòa thì chưa được sử dụng hết năng suất. **Đường đi tăng** là một đường đi chưa bão hòa từ x tới y. Trong ví dụ sau đây, đường đi $P := xv_1v_2v_3y$ là một đường tăng. Các cung thuận của P là xv_1 và v_3y, và $\epsilon(P) = \min\{5, 2, 5, 4\} = 2$.



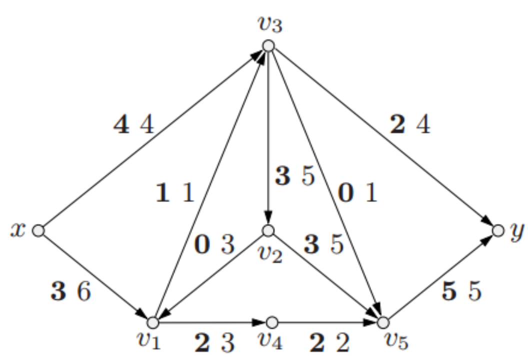
Đường đi tăng trong một mạng lưới có vai trò rất quan trọng vì nó cho ta biết liệu f có phải là một luồng cực đại hay không. Bằng cách tăng thêm $\epsilon(P)$ vào luồng đi qua P, ta có thể thu được một luồng mới f' với tổng luồng lớn hơn. Cụ thể, xác định f' như sau:

$$f'(a) := \begin{cases} f(a) + \epsilon(P) & \text{nếu } a \text{ là cung thuận} \\ f(a) - \epsilon(P) & \text{nếu } a \text{ là cung nghịch} \\ f(a) & \text{nếu } a \text{ không thuộc } P \end{cases}$$

Ta có mệnh đề sau đây.

MỆNH ĐỀ 3.4
Cho f là một luồng trong mạng lưới N. Nếu tồn tại một đường đi tăng P, khi đó f không phải là luồng cực đại. Cụ thể, luồng f' xác định như trên có tổng luồng $\text{val}(f') = \text{val}(f) + \epsilon(P) > \text{val}(f)$.

Trong đồ thị minh họa ở trên, sau khi biến đổi luồng f thành luồng f' thì mạng lưới thu được sẽ là:



Điều gì sẽ xảy ra nếu như trong mạng lưới không có đường đi tăng? Mệnh đề sau đây sẽ giải quyết vấn đề này.

MỆNH ĐỀ 3.5
Cho f là một luồng trong mạng lưới $N(x, y)$. Giả sử không tồn tại đường đi tăng trong N. Gọi X là tập hợp các đỉnh tới được từ x bởi một đường đi chưa bão hòa, và đặt $K := \partial^+(X)$. Khi đó f là luồng cực đại và K là lát cắt cực tiểu.

Hệ quả quan trọng của mệnh đề 3.4 và mệnh đề 3.5 là định lí sau đây, được phát hiện độc lập bởi Elias et al. (1956) và Ford-Fulkerson (1956).

ĐỊNH LÍ LUỒNG CỰC ĐẠI-LÁT CÁT CỰC TIỂU
Trong một mạng lưới bất kì, tổng luồng của luồng cực đại bằng với năng suất của lát cắt cực tiểu.

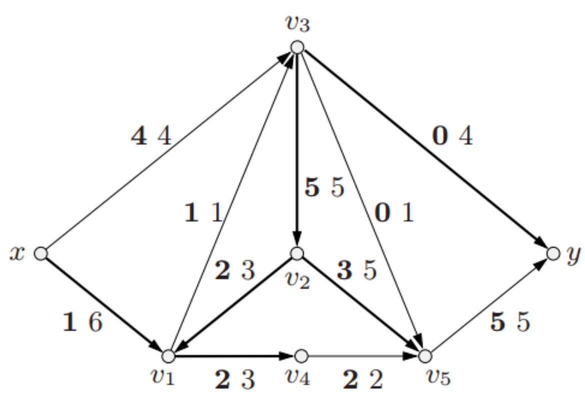
5. Bài toán tìm cặp ghép lớn nhất

5.1. Thuật toán Ford-Fulkerson

Định li sau đây là hệ quả trực tiếp từ mệnh đề 3.4 và mệnh đề 3.5.

ĐINH LÍ 3.6
Trong mạng lưới, một luồng là cực đại nếu và chỉ nếu không tồn tại đường đi tăng ứng với luồng đó.

Định lí này là tiền đề cho thuật toán tìm luồng cực đại trong một mạng lưới. Bắt đầu với một luồng f bất kì cho trước, chẳng hạn luồng 0, ta tìm một đường đi tăng bằng một thuật toán tìm cây. Một cây có gốc x T được gọi là *cây chưa bão hòa* nếu như với mọi $v \in T$, đường đi xTv là chưa bão hòa (đường đi vô hướng). Sau đây là ví dụ về một cây chưa bão hòa (các cạnh được tô đậm).

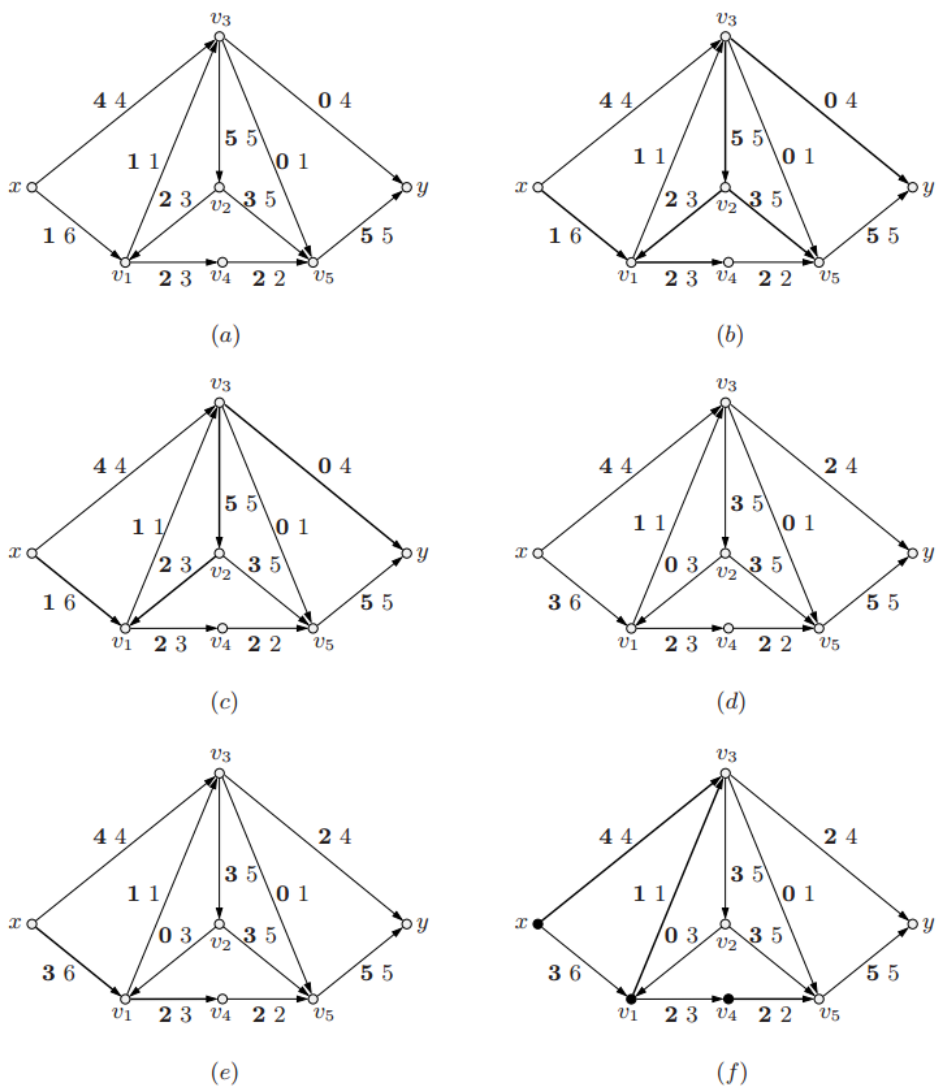


Bắt đầu thuật toán, cây T chỉ bao gồm duy nhất một đỉnh x. Tại mỗi bước, có hai cách ta có thể mở rộng cây này. Nếu tồn tại một cung chưa bão hòa a trong $\partial^+(X)$, với $X = V(T)$, thì ta thêm cả a và đỉnh cuối của a vào T (đỉnh đầu của a đã thuộc T vì $a \in \partial^+(X)$. Tương tự, nếu có một cung dương a trong $\partial^-(X)$ thì ta cũng thêm cả a và đỉnh cuối của a vào T. Đến cuối quá trình, nếu T đến được y (y thuộc T) thì xTy là một đường đi tăng, và ta thay f bởi f' xác định như trên. Nếu quá trình dừng lại mà T không đến được y, thì T là một cây chưa bão hòa cực đại, và mỗi cung trong $\partial^+(X)$ đều là cung bão hòa, cũng như mỗi cung trong $\partial^-(X)$ là cung rỗng (chú ý ta vẫn dùng X để chỉ tập đỉnh $V(T)$ của T). Đến đây ta có thể kết luận từ định lí 3.2 rằng f là luồng cực đại và $\partial^+(X)$ là lát cắt cực tiểu.

THUẬT TOÁN FORD-FULKERSON
input: mạng lưới $N := N(x, y)$ và luồng f trong N.
output: luồng f cực đại và lát cắt $\partial^+(X)$ cực tiểu trong N.

(1) cho $X := \{x\}, p(v) := \emptyset, v \in V$
(2) **while** có một cung chưa bão hòa $a := uv$ hoặc một cung dương $a := uv$ với $u \in X$ và $v \in V \setminus X$ **do**

(3) $X := X \cup \{v\}$
(4) $p(v) := u$
(5) **end while**
(6) **if** $y \in X$ **then**
(7) tính $\epsilon(P) := \min\{\epsilon(a) : a \in A(P)\}$, trong đó P là đường đi xy trong cây vừa tìm ở trên với hàm predecessor p
(8) với mỗi cung thuận a của P, $f(a) := f(a) + \epsilon(P)$
(9) với mỗi cung nghịch a của P, $f(a) := f(a) - \epsilon(P)$
(10) trở lại 1
(11) **end if**
(12) return$(f, \partial^+(X))$



(a) luồng f, (b) cây chưa bão hòa, (c) đường đi tăng, (d) đường đi sau khi thay đổi, (e) cây chưa bão hòa cực đại không chứa y, (f) lát cắt cực tiểu

LƯU Ý: Nếu tất cả giá trị của năng suất đều nguyên hoặc hữu tỉ thì thuật toán sẽ dừng sao hữu hạn bước. Tuy nhiên, điều đó chưa chắc đúng nếu có năng suất nhận giá trị vô tỉ.

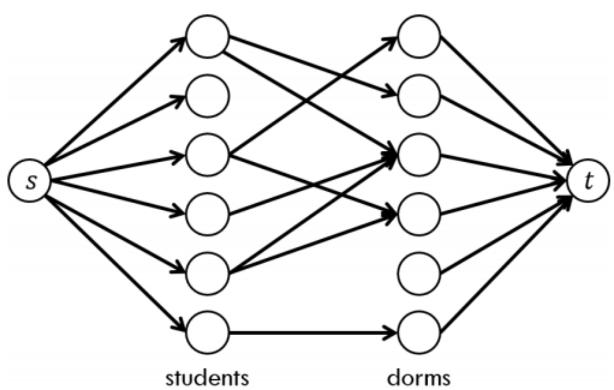
5.2. *Bài toán tìm cặp ghép lớn nhất*

Năm 2015, có 2500 học sinh trên toàn thế giới được nhận vào trường Đại học Chicago (The University of Chicago). Trường có tổng cộng 9 kí túc xá, và mỗi học sinh được đăng kí với trường kí túc xá mà mình muốn ở. Bảng sau đây cho ta biết lượng học sinh tối đa mà mỗi kí túc xá có thể chứa. Hãy tìm một cách sắp xếp sao cho có nhiều học sinh được vào kí túc xá mình đăng kí nhất có thể.

Blackstone	120
Broadview	145
International House	500
Max Palevsky	200
Snell - Hitchcock	175
Burton - Judson	210
Stony Island	280
Renee Granville - Grossman	270
Campus North	600

Một cách tự nhiên, ta sẽ nghĩ đến mô hình đồ thị bao gồm các đỉnh biểu diễn học sinh và kí túc xá, và cạnh nối học sinh x với kí túc xá y nếu và chỉ nếu x chọn y làm nơi mình muốn ở. Tuy nhiên, mô hình này vẫn là một đồ thị vô hướng, và để tìm cách sắp xếp học sinh-kí túc xá tối ưu là tương đối phức tạp. Ta sẽ chuyển mô hình này thành một mạng lưới như sau:

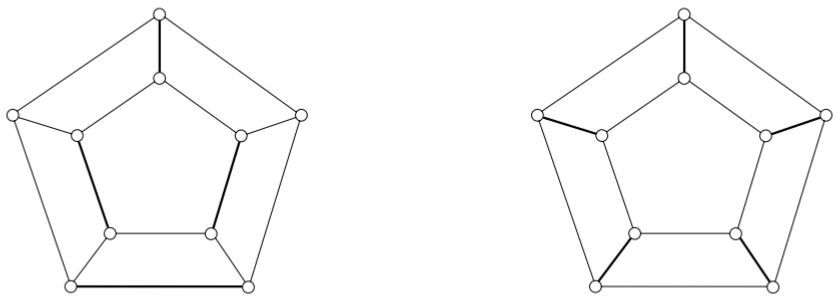
- Thêm đỉnh phát s và đỉnh thu t.
- Nối s đến tất cả các đỉnh biểu diễn học sinh sao cho s là đỉnh đầu, đồng thời tất cả các cung sx, với x là học sinh bất kì, có năng suất 1.
- Nối t đến tất cả các đỉnh biểu diễn kí túc xá sao cho t là đỉnh cuối, đồng thời tất cả các cung yt, với y là kí túc xá bất kì, có năng suất 1.
- Với mỗi học sinh x chọn kí túc xá y, ta cho x là đỉnh đầu và y là đỉnh cuối, đồng thời cung xy có năng suất 1.



Bằng cách đưa về mô hình này, ta đã đưa bài toán ban đầu về bài toán tìm luồng lớn nhất của mạng lưới $N(s, t)$ như trên (tại sao?), và hoàn toàn có thể giải được bằng thuật toán Ford-Fulkerson.

Bài toán trên là ví dụ điển hình của một ứng dụng quan trọng của mạng lưới: tìm cặp ghép lớn nhất trong đồ thị hai phe. Vậy cặp ghép là gì?

Cặp ghép M trong đồ thị là một tập hợp các cạnh đôi một không kề nhau (không có đỉnh chung). Với mỗi cạnh e thuộc M, ta nói *e được ghép* bởi M, và với mỗi đỉnh v liên thuộc với một trong các cạnh của M, ta nói *v được phủ* bởi M.
Cặp ghép hoàn hảo là cặp ghép phủ hết tất cả các đỉnh. Nói cách khác, mỗi đỉnh của đồ thị thuộc đúng một cạnh trong cặp ghép hoàn hảo.
Cặp ghép lớn nhất là cặp ghép chứa nhiều cạnh nhất có thể. **Cặp ghép tối đa** M là cặp ghép mà nếu ta thêm một cạnh chưa thuộc M vào M thì tập hợp cạnh thu được không còn là một cặp ghép. Rõ ràng một cặp ghép lớn nhất thì tối đa, nhưng điều ngược lại chưa chắc đúng. Ví dụ say đây chứng tỏ điều này.



Hiển nhiên, nếu tồn tại một cặp ghép hoàn hảo thì nó cũng là cặp ghép lớn nhất (như hình bên trái của ví dụ trên).
Từ những định nghĩa trên, ta có thể tổng quát hóa bài toán học sinh-kí túc xá trên thành bài toán tìm cặp ghép lớn nhất trong một đồ thị hai phe $G[X,Y]$. Cách làm cũng hoàn toàn tương tự, ta có thể thêm vào đỉnh phát và đỉnh thu rồi chuyển đồ thị vô hướng thành đồ thị có hướng với các cạnh có năng suất 1.