PIMA
Projects in Mathematics and Applications
2016, August (14 trang)

Linear Programming

Trần Hoàng Bảo Linh

National University of Singapore

Subject Index Linear programming, linear algebra.

1. Ví dụ mở đầu

Cũng như bất phương trình đối với phương trình, khái niệm quy hoạch tuyến tính là mở rộng của khái niệm hệ phương trình tuyến tính. Ở đây, nghiệm của hệ phương trình tương ứng với khái niệm miền ràng buộc trong quy hoạch tuyến tính. Mục tiêu của một bài toán quy hoạch tuyến tính là tìm một nghiệm trong miền ràng buộc đó để một hàm tuyến tính đạt cực trị tại nghiệm đó.

Quy hoạch tuyến tính tuy là một khái niệm chỉ có mặt ở bậc Đại học, những nền tảng cở bản lại khá dễ hiểu với kiến thức bậc trung học phổ thông. Cộng với khả năng áp dụng đa dạng cho rất nhiều lớp bài toán tối ưu, quy hoạch tuyến tính được xem như một khái niệm nền tảng trong Toán ứng dụng. Sau đâu sẽ là một ví dụ quen thuộc.

Ví dụ 1.1. (PiMA Math Research Camp 2016 Application Round) *Công ty PIMA cần tạo ra một bữa ăn đạt chuẩn từ thịt gà và thịt bò, đảm bảo cung cấp đầy đủ các dưỡng chất: protein, canxi và sắt, với chi phí nguyên liệu thấp nhất có thể. Các nhà khoa học của PIMA nghiên cứu và phát hiện ra: Một bữa ăn đạt chuẩn cần ít nhất* $200g$ *protein,* $50g$ *canxi và* $30g$ *sắt.*
Mỗi kg thịt gà cung cấp $20g$ *protein,* $7g$ *canxi và* $5g$ *sắt.*
Mỗi kg thịt bò cung cấp $25g$ *protein,* $5g$ *canxi và* $10g$ *sắt.*
Thịt gà có giá 10 *đồng/kg, thịt bò có giá* 15 *đồng/kg.*
Hãy tìm cách để tạo được bữa ăn đạt chuẩn với giá thành nhỏ nhất có thể.

Mô hình. Gọi x và y lần lượt là lượng thịt gà và thịt bò trong một bữa ăn tính bằng kg.
Ta có:
Tổng số protein trong một bữa ăn: $20x + 25y$.
Tổng số canxi trong một bữa ăn: $7x + 5y$.
Tổng số sắt trong một bữa ăn: $5x + 10y$.
Tổng giá tiền của một bữa ăn: $10x + 15y$.
Theo đề bài x và y phải thỏa mãn:

$$\begin{cases} 20x + 25y & \geq 200 \\ 7x + 5y & \geq 50 \\ 5x + 10y & \geq 30 \end{cases}$$

Ta cần tìm x và y để $10x + 15y$ lớn nhất.

2. Khái niệm

2.1. Quy hoạch tuyến tính thực

Định nghĩa 2.1. Một hàm tuyến tính của n biến $x_1, \ldots, x_n$ là hàm có dạng: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n$, trong đó $a_1, a_2, \ldots a_n$ là những hằng số thực.

Định nghĩa 2.2. Một phương trình/bất phương trình tuyến tính của n ẩn là phương trình/bất phương trình có dạng: $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leq g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, trong đó f và g là những hàm tuyến tính n biến.

Định nghĩa 2.3. Một bài toán quy hoạch tuyến tính là một bài toán tối ưu hóa có dạng như sau:
Tìm giá trị lớn nhất/nhỏ nhất của hàm $f(x_1, \ldots, x_n)$, trong đó f là một hàm tuyến tính n biến và các biến $x_1, x_2, \ldots, x_n$ phải thỏa mãn một số phương trình/hệ phương trình cho trước.

Một bài toán quy hoạch tuyến tính ở dạng chuẩn bao gồm những phần sau:
(a) Các ẩn số không âm (decision variables): $x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$.
(b) Các phương trình điều kiện (constraints):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & = b_m \end{cases}$$

Trong đó $a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1n}, \ldots, a_{mn}$ và $b_1, b_2, \ldots, b_m$ $(n \geq m)$ là những hằng số thực và $b_i \geq 0 \;\; \forall i$.
(c) Hàm tuyến tính cần được tối đa hóa (hàm mục tiêu - objective function)

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

Với $c_1, c_2, \ldots, c_n$ là những hằng số thực.

Ví dụ 2.4. *Tìm giá trị lớn nhất của* $2x + 1.5y + 4z$ *với điều kiện:*

$$\begin{cases} x, y, z & \geq 0 \\ x + 2y - 3z & \leq 3 \\ 4x - y + 0.5z & \leq 1 \\ 2.5x + 3y + 2z & \leq 10 \end{cases}$$

Lưu ý. (Dạng ma trận của bài toán quy hoạch tuyến tính) Một bài toán quy hoạch tuyến tính có thể được phát biểu dưới dạng ma trận như sau:
1. Vector ẩn số: $\mathbf{x} = (x_1 \;\; x_2 \;\; \ldots \;\; x_n)^T, \;\; x_i \geq 0 \;\; \forall i$
2. Điều kiện: $\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$
3. Tìm giá trị lớn nhất của hàm: $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{c}^T\mathbf{x}$

Dưới đây là dạng ma trận của **ví dụ 1.1**:

Ví dụ 2.5. *Tìm giá trị lớn nhất của:* $f(\mathbf{x}) = (2\ 1.5\ 4)^T\mathbf{x}$ *với điều kiện:*

$$x \geq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 4 & -1 & 0.5 \\ 2.5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x} \leq \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 10 \end{pmatrix}$$

2.2. Biến thể: Quy hoạch tuyến tính nguyên

Một bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên là một bài toán quy hoạch tuyến tính có thêm điều kiện các ẩn là số nguyên. (Lưu ý: các hằng số vẫn là số thực).

Những bài toán trong đó các ẩn số cần tìm biểu thị số lượng của những vật thể đếm được (người, nhà, xe) thường được mô hình bằng quy hoạch tuyến tính nguyên. Ngoài ra, những ẩn số biểu thị một quyết định có hoặc không cũng có thể được mô hình bằng một ẩn số nguyên chỉ nhận giá trị 0 và 1.

Vì tính chất rời rạc của các số nguyên mà trong nhiều trường hợp, giải thuật của bài toán quy hoạch tuyến tính thực không thể áp dụng được cho ẩn số nguyên. Tuy nhiên, cũng vì lí do đó mà bài toán quy hoạch tuyến tính nguyên có những giải thuật đặc biệt không thể áp dụng được cho trường hợp ẩn thực.

Ví dụ 2.6. (PiMA Math Research Camp 2016 Interview Round) *Một tên cướp đang ở một tiệm đá quý. Tiệm đá quý có* 3 *loại: kim cương, pha lê và ngọc trai với trọng lượng và giá trị khác nhau. Mỗi viên kim cương có giá* 12 *triệu và nặng* 5*kg, mỗi viên ngọc trai có giá* 8 *triệu và nặng* 4*kg, mỗi viên ngọc trai có giá* 6 *triệu và nặng* 3*kg. Trong tiệm có tổng cộng* 2 *viên kim cương,* 5 *viên pha lê và* 4 *viên ngọc trai. Tên cướp chỉ mang được tối đa* 20*kg. Hãy tìm cách để tên cướp kiếm được nhiều tiền nhất.*

Mô hình. Gọi x, y, z lần lượt là số viên kim cương, pha lê và ngọc trai tên cướp lấy, vậy x, y, z là những số nguyên không âm. Ngoài ra, ta có:

$$\begin{cases} x & \leq 2 \\ y & \leq 5 \\ z & \leq 4 \\ 5x + 4y + 3z & \leq 20 \end{cases}$$

Ta cần tìm số tiền lớn nhất tên cướp mang được, tức là tìm giá trị lớn nhất của biểu thức sau:

$$F(x, y, z) = 12x + 8y + 6z \tag{1}$$

Vậy là ta đã tìm được mô hình thích hợp cho bài toán trên.

3. Sơ lược về cách giải

3.1. Quy hoạch tuyến tính thực

3.1.1. Trường hợp 2 ẩn: phương pháp đồ thị. Phương pháp đồ thị (graphic method) thường được áp dụng cho bài toán quy hoạch tuyến tính 2 ẩn. Phương pháp này sử dụng tính chất sau của hệ trục tọa độ Oxy: Miền nghiệm của bất phương trình tuyến tính $ax + by \leq c$ là một trong hai nửa mặt phẳng tạo ra bởi đường thẳng $ax + by = c$.

Sử dụng tính chất này, ta có thể xác định miền nghiệm chung của toàn bộ những bất phương trình điều kiện trong bài toán (gọi là miền ràng buộc). Miền này sẽ có hình một đa giác lồi nếu bị chặn, khi đó hàm mục tiêu chắc chắn đạt được giá trị lớn nhất tại một trong các đỉnh của đa giác này. Khi đó, chúng ta có thể so sánh giá trị của hàm mục tiêu tại các đỉnh của đa giác để tìm vị trí đạt giá trị lớn nhất.
Chúng ta sẽ không đi sâu vào chứng minh những tính chất trên mà sẽ tìm hiểu ứng dụng của phương pháp đồ thị qua những ví dụ sau.

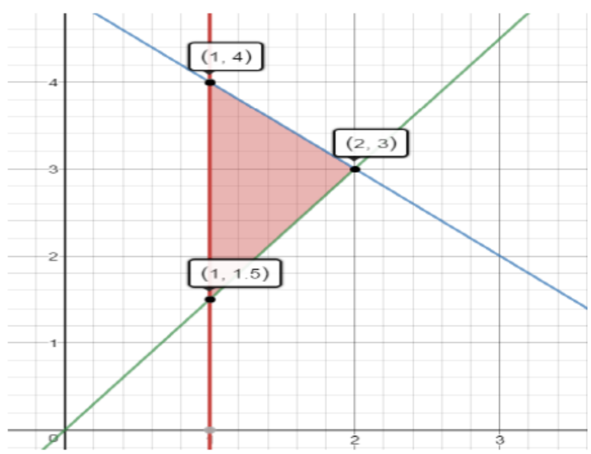
Ví dụ 3.1. *Trung mở một quán trà sữa và mời Hưng đến uống ủng hộ. Trung muốn làm một ly trà sữa thật ngon để tiếp đãi bạn. Trung biết rằng: Hưng thích uống trà sữa với lượng sữa ít nhất gấp rưỡi lượng trà, trọng lượng ly phải không quá* 500*g và có ít nhất* 100*g trà trong đó.*
Giá 100*g trà là* 20.000 *đồng và* 100*g sữa là* 25.000 *đồng. Hỏi Trung phải làm thế nào để pha được ly trà sữa theo ý Hưng và tốn ít chi phí nhất?*

Mô hình. Gọi x và y là lượng trà và sữa Trung cần dùng tính theo 100g. Các điều kiện trong đề bài được viết lại như sau:

$$\begin{cases} x, y \geq & 0 \\ 1.5x - y \leq & 0 \\ x + y \leq & 5 \\ x \geq & 100 \end{cases}$$

Hàm mục tiêu cần đạt giá trị nhỏ nhất: $f(x, y) = 20000x + 25000y$.

Lời giải. Dựa vào những bất phương trình trên mô hình, ta tìm được miền ràng buộc, có dạng một tam giác như trong hình 1. Tiếp theo, chỉ cần so sánh giá trị của hàm mục tiêu tại



Hình 1: Đồ thị biểu diễn miền nghiệm trong ví dụ 3.1

3 đỉnh của tam giác này. Sau khi so sánh, ta kết luận $f(x, y) = 20000x + 25000y$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $(x, y) = (1, 1.5)$.
Do đó Trung sẽ tiết kiệm được chi phí nhất với $1 \cdot 100 = 100$g trà và $1.5 \cdot 100 = 150$g sữa.

3.1.2. Phương pháp đơn hình. Đây là phương pháp tổng quát của phương pháp đồ thị ở trên, dùng cho trường hợp n ẩn. Phương pháp này áp dụng 2 nguyên lý cơ bản:

Định lý 3.2. Nếu một bài toán quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu thì nó cũng có nghiệm tối ưu nằm trên một đỉnh của miền ràng buộc.

Định lý 3.3. Nếu một nghiệm của bài toán là cực trị địa phương của hàm mục tiêu thì nó cũng là một cực trị tuyệt đối, nghĩa là một nghiệm tối ưu.

Ý tưởng chung của phương pháp đơn hình là bắt đầu từ một nghiệm ban đầu, nếu nó chưa phải tối ưu thì đi theo một cạnh của miền ràng buộc để tới được một nghiệm tối ưu hơn. Khi thuật toán kết thúc thì nghiệm tìm được chính là nghiệm tối ưu.
Để giải một bài toán quy hoạch tuyến tính bằng phương pháp đơn hình, ta thực hiện các bước sau:
Bước 0. (Đưa bài toán về dạng chuẩn)
Ta áp dụng những biến đổi sau:

(a) Nếu có biến $x_i \leq 0$ thì đặt $y_i = -x_i$ và thay vào bài toán.
(b) Nếu có biến $x_i \geq c > 0$ thì đặt $y_i = x_i - c$ và thay vào bài toán.
(c) Nếu có điều kiện dạng $f(x_1, \dots, x_n) + C_1 \leq g(x_1, \dots, x_n) + C_2$ thì chuyển vế để đưa về dạng $h(x_1, \dots, x_n) \leq C$
(d) Nếu có điều kiện dạng $h(x_1, \dots, x_n) \leq C$ với $C \geq 0$ thì đưa thêm biến $s \geq 0$ vào để tạo thành dạng $h(x_1, \dots, x_n) + s = C$.
(e) Nếu có điều kiện dạng $h(x_1, \dots, x_n) \leq C$ với $C < 0$ thì đưa thêm biến $t \geq 0$ vào để tạo thành dạng $-t - h(x_1, \dots, x_n) = -C$.
(f) Nếu có biến x_i không có điều kiện ràng buộc nào (biến tự do) thì viết $x_i = y_i - z_i$ với $y_i, z_i \geq 0$ và thay vào bài toán.

Sau khi kết thúc, ta được một bài toán tương đương với bài toán ban đầu và ở dạng chuẩn. Lưu ý rằng những biến đổi trên đảm bảo rằng số phương trình không vượt quá số biến.
Bước 1. (Lập bảng đơn hình)
Ta có:
Hàm mục tiêu: $F(X) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$.
Các phương trình ràng buộc:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases}$$

Ta lập bảng đơn hình như sau:

$$\left|\begin{array}{ccccc|c|} 1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_n & 0 \\ \hline 0 & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & & \dots \\ 0 & a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_n \end{array}\right.$$

Dùng biến đổi Gauss, ta có thể đưa bảng trên về dạng chuẩn:

$$\begin{array}{|cccccccc|c|}
1 & -c_1 & -c_2 & \dots & -c_m & -c_{m+1} & \dots & -c_n & 0 \\
\hline
0 & 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1(m+1)} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
0 & 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2(m+1)} & \dots & a_{2n} & b_2 \\
 & & & & & \dots & & \dots & \\
0 & 0 & 0 & \dots & 1 & a_{m(m+1)} & \dots & a_{mn} & b_n
\end{array}$$

Ở dạng này, các biến tương ứng với các cột của ma trận đơn vị được gọi là biến cơ bản, các biến còn lại là biến tự do. Dễ thấy khi các biến tự do bằng 0 thì ta có 1 nghiệm của miền ràng buộc: $(b_1, b_2, \dots, b_n, 0, \dots, 0)$. Đây sẽ là nghiệm xuất phát cho thuật toán.
Ở các bước sau, ta chọn 1 biến tự do (gọi là biến vào) và 1 biến cơ bản (biến ra) để hoán đổi vị trí của chúng sao cho bộ nghiệm mới có giá trị hàm mục tiêu lớn hơn bộ cũ.

Bước 2. (Chọn biến vào)
Nếu mọi hệ số $-c_i$ với $i > m$ đều không âm thì nghiệm hiện tại là nghiệm tối ưu (hàm mục tiêu đạt giá trị lớn nhất).
Ngược lại, chọn $i > m$ sao cho $-c_i < 0$. Đặt x_i là biến vào. Cột i gọi là trục xoay.

Bước 3 (Chọn biến ra)
Sau khi đã chọn biến vào và trục xoay, ta xem xét các hệ số trên trục xoay.
Nếu các hệ số này đều không dương, hàm mục tiêu không bị chặn trên. Thuật toán kết thúc.
Ngược lại, ta chọn r sao cho b_r/a_{ri} là nhỏ nhất trong $\{r|a_{ri} > 0\}$. x_r sẽ là biến ra.

Bước 4 (Biến đổi xoay vòng)
Đầu tiên, ta nhân hàng r với $1/a_{ri}$ để biến a_{ri} thành 1.
Sau đó ở hàng j khác r, ta biến đổi: $R_j = R_j - a_{ji}R_r$ để biến a_{ji} thành 0. Bây giờ trục xoay đã trở thành cột thứ r của ma trận đơn vị.
Cuối cùng ta đổi thứ tự $C_r \leftrightarrow C_i$ và biến x_i sẽ thay x_r trở thành một biến cơ bản. Bảng đơn hình mới cũng thuộc dạng chuẩn. Hơn nữa, giá trị của hàm mục tiêu tăng lên.

Bước 5 Quay lại *bước 2.*

Định lý 3.4. Nếu bài toán quy hoạch tuyến tính có nghiệm tối ưu, thuật toán đơn hình luôn kết thúc với một trong những nghiệm tối ưu.

Điều này có thể hiểu được dựa trên nguyên tắc rằng nghiệm tiếp theo được sinh ra luôn có giá trị hàm mục tiêu lớn hơn hẳn so với nghiệm trước. Mặt khác, số nghiệm được xét là hữu hạn (chỉ có hữu hạn cách chọn bộ các biến cơ bản), do vậy thuật toán sẽ kết thúc tại 1 nghiệm nào đó. Theo định lý 3.3, nghiệm này phải là nghiệm tối ưu.

Ví dụ 3.5. *Tìm giá trị lớn nhất của:* $F(x) = 2x + 3y + 4z$ *biết rằng:*

$$\begin{cases} x, y, z \geq & 0 \\ 3x + 2y + z \leq & 10 \\ 2x + 5y + 3z \leq & 15 \end{cases}$$

Lời giải. Sau khi thêm các biến bù u và v, ta được bảng đơn hình sau:

$$\begin{array}{|cccccc|c|}
1 & -2 & -3 & -4 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 3 & 2 & 1 & 1 & 0 & 10 \\
0 & 2 & 5 & 3 & 0 & 1 & 15
\end{array}$$

Biến cơ bản: $\{u, v\}$.
Ta chọn cột 1 làm trục xoay, tức là x là biến vào. Khi đó vì $10/3 < 15/2$ nên hàng 1 được chọn, tức là u sẽ là biến ra. Bảng đơn hình mới như sau:

$$\left|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & -5/3 & -10/3 & 2/3 & 0 & 20/3 \\ 0 & 1 & 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 & 10/3 \\ 0 & 0 & 11/3 & 7/3 & -2/3 & 1 & 25/3 \end{array}\right|$$

Biến cơ bản: $\{x, v\}$.
Tiếp theo, chọn cột 3 làm trục xoay (z là biến vào). Khi đó vì $25/7 < 10/1$ nên v là biến ra. Bảng đơn hình mới như sau:

$$\left|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 0 & 25/7 & 0 & -2/7 & 10/7 & 130/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & 0 & 3/7 & -9/7 & 15/7 \\ 0 & 0 & 11/7 & 1 & -2/7 & 3/7 & 25/7 \end{array}\right|$$

Biến cơ bản: $\{x, z\}$.
Chọn cột 4 làm trục xoay. Khi đó x là biến ra. Ta được:

$$\left|\begin{array}{cccccc|c} 1 & 2/3 & 11/3 & 0 & 0 & 4/7 & 20 \\ 0 & 7/3 & 1/3 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 2/3 & 5/3 & 1 & 0 & -3/7 & 5 \end{array}\right|$$

Biến cơ bản: $\{z, u\}$.
Đến đây các hệ số ở hàng 0 đều không âm nên thuật toán kết thúc. Giá trị lớn nhất cần tìm là 20, đạt được tại $(x, y, z, u, v) = (0, 0, 5, 5, 0)$ hay $(x, y, z) = (0, 0, 5)$.

3.2. Bài tập

Giải những bài toán sau (không giới hạn phương pháp):

3.2.1. Tìm giá trị nhỏ nhất của $5x + 7y$ biết:

$$\begin{cases} x, y \geq & 0 \\ 2x + 3y \geq & 6 \\ 3x - y \leq & 15 \\ -x + y \leq & 4 \\ 2x + 5y \leq & 27 \end{cases}$$

3.2.2. Tìm giá trị nhỏ nhất của $2x + 3y + 3z$ biết:

$$\begin{cases} x, y, z \geq & 0 \\ x + y - z \geq & 2 \\ x + 2y - 3z \geq & 3 \\ -x + 4y + 5z \geq & 6 \end{cases}$$

4. Mô hình các vấn đề bằng quy hoạch tuyến tính

Trong một bài toán tối ưu hóa, đề bài thường yêu cầu lập một kế hoạch bằng cách kết hợp nhiều phương án có sẵn với một số điều kiện ràng buộc. Ví dụ: trong một kế hoạch ăn uống, những phương án sẽ là ăn thịt gà, thịt bò và thịt lợn. Lượng thịt mỗi loại sẽ là hệ số của

phương án tương ứng trong kế hoạch đó.
Những điều kiện ràng buộc thường là lượng tài nguyên dành cho những phương án bị giới hạn hoặc một số phương án không thể thực hiện cùng lúc. Mỗi phương án cũng tiêu thụ một lượng tài nguyên nhất định, gọi là chi phí của phương án đó. Chi phí của một kế hoạch đối với một tài nguyên sẽ là tổng chi phí của những phương án thành phần với tài nguyên đó.
Mỗi phương án mang lại một lượng lợi ích nhất định, gọi là giá trị của phương án đó. Giá trị của một kế hoạch sẽ là tổng giá trị của những phương án thành phần trong đó.
Mục tiêu của bài toán thường là tìm hệ số cho mỗi phương án sao cho giá trị của kế hoạch lập được là cao nhất.

Để biến một bài toán thực tế thành một bài toán quy hoạch tuyến tính cần thực hiện 3 bước:
1. Xác định các ẩn số. Như đã đề cập ở trên, mỗi kế hoạch là sự kết hợp của những phương án thành phần mà mỗi phương án có một hệ số. Như vậy, để xác định kế hoạch tối ưu (kế hoạch có giá trị cao nhất), chỉ cần xác định hệ số của mỗi phương án thành phần. Do đó, các ẩn số chính là các hệ số của những phương án tương ứng.

2. Xác định các bất phương trình điều kiện. Đầu tiên cần phải xác định những tài nguyên được đề bài đưa ra, sau đó tìm chi phí của mỗi phương án đối với từng tài nguyên. Với mỗi tài nguyên, lập biểu thức tính chi phí của kế hoạch đối với tài nguyên đó (tức là tính tổng chi phí của những phương án thành phần). Biểu thức lập được chính là vế trái của bất phương trình điều kiện. Vế phải đơn giản là lượng tài nguyên tối đa mà đề bài cho sẵn.

3. Xác định hàm mục tiêu. Cần phải xác định giá trị cần tối đa hóa mà đề bài cho, sau đó xác định giá trị của những phương án có thể. Lập biểu thức cho tổng giá trị kế hoạch dựa vào những giá trị thành phần với các hệ số (chính là các ẩn số ở bước 1). Biểu thức này chính là hàm mục tiêu cần tìm.

Sau đâu chúng ta sẽ xem xét một số ví dụ của việc lập một mô hình quy hoạch tuyến tính cho những bài toán khác nhau.

4.1. Quy hoạch tuyến tính thực

Ví dụ 4.1. *Một bác nông dân có tổng cộng* 100 *hecta đất để trồng lúa và ngô. Mỗi hecta lúa bán được* 40 *triệu đồng và cần* 3 *tấn phân bón và* 1.5 *tấn thuốc trừ sâu. Mỗi hecta ngô bán được* 70 *triệu đồng và cần* 6 *tấn phân bón và* 2 *tấn thuốc trừ sâu.*
Bác nông dân có tổng cộng 400 *tấn phân bón và* 250 *tấn thuốc trừ sâu. Hỏi bác phải làm thế nào để thu được lợi nhuận cao nhất?*

Mô hình. Trong bài toán này, dễ thấy kế hoạch cần tìm là sự kết hợp giữa 2 phương án: trồng lúa và trồng ngô. Vậy tương ứng có 2 ẩn số: x là số hecta trồng lúa và y là số hecta trồng ngô.
Các điều kiện được đề cập là giới hạn về diện tích đất, số phân bón và thuốc trừ sâu. $(x, y \geq 0)$
Chi phí về đất cho 1 kế hoạch là: $x + y$.
Chi phí phân bón cho 1 kế hoạch là: $3x + 6y$.

Chi phí thuốc trừ sâu cho 1 kế hoạch là: $1.5x + 2y$.
Vậy ta có 3 phương trình điều kiện:

$$\begin{cases} x + y \leq 100 \\ 3x + 6y \leq 400 \\ 1.5x + 2y \leq 250 \end{cases}$$

Sau cùng, lợi nhuận đem lại của 1 kế hoạch là: $40x + 70y$.
Vậy $f(x, y) = 40x + 70y$ là hàm mục tiêu mà ta cần tìm giá trị lớn nhất.
Bài toán này có thể giải được bằng phương pháp đồ thị.

Ví dụ 4.2. (Bài toán vận tải) *Một công ty bán lẻ có m chi nhánh, được đánh số từ 1 tới m. Lượng hàng ở chi nhánh thứ i được ký hiệu S_i. Công ty có n khách hàng, được đánh số từ 1 tới n.*
Lượng hàng khách hàng thứ j muốn mua là D_j. Chi phí vận chuyển mỗi đơn vị hàng từ chi nhánh i tới khách hàng j là C_{ij}. Hãy lập kế hoạch vận chuyển cho công ty sao cho mỗi khách hàng đều được thỏa mãn và chi phí vận chuyển là nhỏ nhất.

Mô hình. Ở đây, mỗi phương án sẽ là một cuộc vận chuyển từ chi nhánh i tới khách hàng j. Gọi x_ij là số hàng được chuyển từ chi nhánh i tới khách hàng j. Như vậy có tổng cộng $m \cdot n$ ẩn số: $x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{1n}, \ldots, x_{m1}, \ldots, x_{mn}$.

Có 2 loại điều kiện trong bài:

1) Giới hạn lượng hàng trong mỗi chi nhánh.
Tổng lượng hàng được chuyển từ chi nhánh i là: $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in}$.
Tổng lượng hàng có trong chi nhánh i là: S_i.
Vậy ta có: $x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} \leq S_i \quad \forall i = 1, \ldots, n$.

2) Lượng hàng mỗi khách hàng đặt.
Tổng lượng hàng khách hàng j nhận được: $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj}$.
Tổng lượng hàng khách hàng j đặt mua: D_j.
Vậy ta có: $x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} \geq D_j \quad \forall j = 1, \ldots, m$.

Trong bài toán này, đại lượng cần tối ưu hóa là chi phí vận chuyển, nhưng mục tiêu là tìm giá trị nhỏ nhất chứ không phải lớn nhất. Tuy nhiên, đại lượng T đạt giá trị nhỏ nhất cũng có nghĩa là đại lượng $-T$ lớn nhất. Ta đặt giá trị của phương án vận chuyển từ chi nhánh i tới khách hàng j là $-C_ij$. Khi đó hàm mục tiêu cần tối đa hóa là:

$$F(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}) = -C_{11}x_{11} - C_{12}x_{12} - \ldots. - C_{mn}x_{mn}$$

Ví dụ 4.3. (Xếp lịch sản xuất) *Công ty Triple H (đặt tên theo 3 nhà sáng lập: Hải, Hưng và Hoàng) sản xuất nhựa tái chế từ nhựa phế liệu. Công ty sử dụng 2 loại nguyên liệu chính là chai nhựa cũ và bao ni lông để sản xuất. Chai nhựa rỗng cần 2 giờ để nấu chảy và mỗi tấn cho ra 0.8 tấn nhựa từ 0.5 tấn chất xúc tác. Bao ni lông cần 1 giờ để nấu chảy và cho ra 0.3 tấn nhựa từ 0.1 tấn chất xúc tác. Mỗi ngày công ty thu thập được 8 tấn chai nhựa và 5 tấn bao ni lông. Công ty cần sản xuất ra ít nhất 6 tấn nhựa mỗi ngày. Để đảm bảo an toàn về* *điện, không được đưa quá 4 tấn nguyên liệu vào lò tại bất kì lúc nào. Hãy tìm giải pháp sản xuất tối ưu cho công ty.*

Mô hình. Giải pháp tối ưu của công ty sẽ là giảm tối đa lượng chất xúc tác sử dụng. Gọi x_i và y_i lần lượt là lượng chai nhựa và bao ni lông được đưa vào nấu chảy từ tiếng thứ i ($i = 1, 2, \ldots, 24$). Ta lần lượt có các phương trình sau:

- Giới hạn nguyên liệu:
  $x_1 + x_2 + \ldots + x_{24} \leq 8$
  $y_1 + y_2 + \ldots + y_{24} \leq 5$
- Giới hạn của lò đốt:
  $x_i + x_{i-1} + y_i \leq 4$ $i = 1, 2, \ldots, 24$ (Xem $x_0 = x_{24}$)
- Tiêu chuẩn nhựa hàng ngày:
  $0.8(x_1 + x_2 + \ldots + x_{24}) + 0.3(y_1 + y_2 + \ldots + y_{24}) \geq 6$

Hàm mục tiêu cần tối thiểu hóa:

$$F(x_1, x_2, \ldots, x_{24}, y_1, \ldots, y_{24}) = 0.5(x_1 + x_2 + \ldots + x_{24}) + 0.1(y_1 + y_2 + \ldots + y_{24})$$

4.2. Quy hoạch tuyến tính nguyên

Ví dụ 4.4. (Chia kẹo) *Trong túi mẹ có 3 loại kẹo: 4 viên kẹo me, 3 viên kẹo bạc hà và 6 viên kẹo sữa. Mẹ muốn chia kẹo cho Trung và Liên sao cho tổng mức độ hài lòng của hai con là nhiều nhất. Biết rằng mức độ thích của Trung với kẹo me, bạc hà và sữa lần lượt là a_1, a_2, a_3 và Liên tương ứng là b_1, b_2, b_3. Hãy tìm cách giúp mẹ chia kẹo.*

Mô hình. Gọi x_1, x_2, x_3 lần lượt là số kẹo me, bạc hà và sữa Trung được nhận và y_1, y_2, y_3 là tương ứng của Liên. Khi đó $x_i, y_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ với $i = 1, 2, 3$. Ta có các điều kiện sau:

$$\begin{cases} x_1 + y_1 & \leq & 4 \\ x_2 + y_2 & \leq & 3 \\ x_3 + y_3 & \leq & 6 \end{cases}$$

Hàm mục tiêu cần đạt giá trị lớn nhất:

$$F(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + b_1y_1 + b_2y_2 + b_3y_3$$

Ví dụ 4.5. (Cặp ghép lớn nhất) *Một dịch vụ tìm bạn đời tổ chức một buổi gặp gỡ cho m chàng trai và n cô gái độc thân. Mức độ tình cảm giữa chàng trai i và cô gái j là L_{ij} (có thể xem là mức độ hạnh phúc khi cả hai ở bên nhau) ($i = 1, 2, \ldots, m$ và $j = 1, 2, \ldots, n$). Hãy tìm cách ghép cặp mỗi chàng trai với không quá một cô gái và mỗi cô gái với không quá một chàng trai sao cho tổng mức độ hạnh phúc là nhiều nhất.*

Mô hình. Trong bài toán này, một kế hoạch ghép cặp sẽ bao gồm $m \cdot n$ quyết định: ghép hoặc không ghép chàng trai i và cô gái j. Mỗi quyết định sẽ được biểu thị bằng một ẩn số nguyên x_{ij} nhận 2 giá trị 0 hoặc 1. Ta có $x_{ij} = 1$ khi 2 người được ghép với nhau và $x_{ij} = 0$ nếu ngược lại.

Điều kiện đầu tiên do vậy sẽ là:

$$0 \leq x_{ij} \leq 1 \quad \forall i, j$$

Tiếp theo, do mỗi chàng trai chỉ được ghép với không quá một cô gái:

$$x_{i1} + x_{i2} + \ldots + x_{in} \leq 1 \quad \forall i = 1, \ldots, m$$

Lưu ý bất phương trình trên có nghĩa là trong các ẩn $x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{in}$ chỉ có không quá một biến nhận giá trị 1, tức là có tối đa một cặp ghép chứa chàng trai i. Tương tự với mỗi cô gái j:

$$x_{1j} + x_{2j} + \ldots + x_{mj} \leq 1 \quad \forall j = 1, \ldots, n$$

Cuối cùng, hàm mục tiêu sẽ là tổng mức độ hạnh phúc của những cặp được ghép với nhau. Lưu ý rằng với cặp i, j không được ghép với nhau, $x_{ij} = 0$ nên không làm thay đổi giá trị của tổng:

$$F(x_{11}, x_{12}, \ldots, x_{mn}) = L_{11}x_{11} + L_{12}x_{12} + \ldots + L_{mn}x_{mn}$$

Ví dụ 4.6. *Trường tiểu học PiMA có* 600 *học sinh và* 3 *phòng máy tính, mỗi phòng có sức chứa* 40 *học sinh. Mỗi giờ học Tin học kéo dài* 2 *tiếng liên tiếp và diễn ra vào buổi sáng (7 giờ - 11 giờ). Chi phí hoạt động mỗi tiếng của một phòng máy là* 1 *triệu đồng. Hãy sắp xếp giờ học Tin học sao cho mỗi học sinh được học Tin học đúng* 1 *lần mỗi tuần và giảm tối đa chi phí phòng máy.*

Mô hình. Một giờ Tin học có thể bắt đầu vào $7, 8$ hoặc 9 giờ sáng. Một tuần học có 5 ngày, do đó có tổng cộng $3 \cdot 5 = 15$ giờ học tối đa. Gọi s_{ij} là số học sinh học vào giờ học thứ i trong ngày thứ j (đánh số các giờ học theo thứ tự thời gian: $i = 7, 8, 9$, $j = 2, 3, 4, 5, 6$). Trong mỗi ngày j, số học sinh học Tin mỗi giờ như sau:

- Từ 7-8 giờ: s_{7j} học sinh.
- Từ 8-9 giờ: $s_{7j} + s_{8j}$ học sinh.
- Từ 9-10 giờ: $s_{8j} + s_{9j}$ học sinh.
- Từ 10-11 giờ: s_{9j} học sinh.

Bây giờ, gọi số phòng máy cần dùng trong khoảng $i - (i + 1)$ giờ là u_{ij}, ta có:

- $s_{7j} = 40u_{7j} - v_{7j}$.
- $s_{7j} + s_{8j} = 40u_{8j} - v_{8j}$.
- $s_{8j} + s_{9j} = 40u_{9j} - v_{9j}$.
- $s_{9j} = 40u_{10j} - v_{10j}$.

Trong đó $0 \leq v_{ij} \leq 39$ $\forall i$. Từ đó suy ra:

- $s_{7j} = 40u_{7j} - v_{7j}$.
- $s_{8j} = 40u_{8j} - v_{8j} - 40u_{7j} + v_{7j}$.
- $s_{8j} = 40u_{9j} - v_{9j} - 40u_{10j} + v_{10j}$.
- $s_{9j} = 40u_{10j} - v_{10j}$.

Vậy các ẩn của bài toán chính là s_{ij}, u_{ij} và v_{ij}. Ta có các phương trình ràng buộc sau:

$$\begin{cases} 0 \le u_{7j}, u_{8j}, u_{9j}, u_{10j} \le 3 \\ 0 \le v_{7j}, v_{8j}, v_{9j}, v_{10j} \le 39 \\ s_{7j} = 40u_{7j} - v_{7j} \\ s_{8j} = 40u_{8j} - v_{8j} - 40u_{7j} + v_{7j} \\ s_{8j} = 40u_{9j} - v_{9j} - 40u_{10j} + v_{10j} \\ s_{9j} = 40u_{10j} - v_{10j} \\ 0 \le s_{7j}, s_{8j}, s_{9j} \\ \sum_{j=2}^{6}(s_{7j} + s_{8j} + s_{9j}) = 600 \end{cases}, \quad j = 2, 3, 4, 5, 6.$$

Hàm mục tiêu cần được tối thiểu hóa là:

$$F(u_{7,2}, u_{8,2}, \ldots, u_{10,6}) = u_{72} + u_{82} + \ldots + u_{106}$$

4.3. Bài tập

Lập mô hình cho các bài toán sau:

4.3.1. Một công ty dược phẩm pha chế một loại thuốc kháng sinh mới từ n loại thành phần. 1g thành phần i có độ mạnh v_i, giá thành c_i và gây ra tác dụng phụ có mức độ p_i. Để được tiêu thụ trên thị trường, một viên thuốc 10g phải có độ mạnh ít nhất là V và gây tác dụng phụ không quá mức độ P. Hãy tìm cách pha chế được viên thuốc đạt chuẩn và có giá thành thấp nhất.

4.3.2. Trước trận chung kết giải vô địch Dota 2 thế giới, một nhà cái ước tính xác suất xảy cho từng tỉ số và đưa ra tỉ lệ cược cho từng tỉ số. Mỗi tỉ lệ cược có dạng "1 ăn x" với x là số thực dương. Hãy tìm cách để nhà cái có thể thu được nhiều tiền nhất từ người đặt cược.

4.3.3. Tên trùm buôn lậu ma túy Donald Trung muốn vận chuyển 5 tấn hàng từ North Carolina, Mỹ về TP.HCM trong vòng 3 ngày trước khi FBI phát hiện. Có 3 đường bay từ Mỹ đến TP.HCM: thông qua Frankfurt (Đức), Narita (Nhật) và Singapore. Giá vé máy bay và thời gian bay ở mỗi đường như sau:

Đường bay	Frankfurt	Narita	Singapore
Giá vé (USD)	1000	1200	1400
Thời gian (giờ)	24	20	16

Để đảm bảo an toàn, ở mỗi đường bay, Trung chỉ bắt đầu chuyến vận chuyển tiếp theo khi chuyến bay trước đã hạ cánh. Ngoài ra, mỗi ngày không được vận chuyển quá 2 tấn ma túy. Hãy tìm cách để Trung chuyển hàng thành công với chi phí tối thiểu.

4.3.4. Một công ty sử dụng m loại tài nguyên để sản xuất ra n loại sản phẩm, mỗi loại sản phẩm tiêu tốn một lượng nhất định thuộc mỗi loại tài nguyên. Biết số lượng mỗi loại tài nguyên có hạn, hãy lập kế hoạch sản xuất cho công ty để đạt lợi nhuận cao nhất.

4.3.5. Có n ứng viên đến xin việc tại một công ty. Ứng viên i có trình độ v_i và đòi hỏi mức lương w_i. Công ty muốn tuyển một nhóm làm việc cho một dự án sao cho tổng trình độ trong nhóm phải ít nhất là V. Hãy lập danh sách các thành viên trong nhóm dự trên các ứng viên xin việc sao cho tổng mức lương là nhỏ nhất.

4.3.6. (Xếp lịch gieo trồng) Khang là một nông dân làm thuê cho Hưng, một địa chủ giàu có. Hưng có tổng cộng 100 hecta đất và 2 giống lúa: lúa ngắn ngày và lúa dài ngày. 1 hecta lúa ngắn ngày tiêu thụ 3 tấn phân bón và 2 tấn thuốc trừ sâu, thu hoạch trong 3 tháng. 1 hecta lúa dài ngày tiêu thụ 2 tấn phân bón và 1 tấn thuốc trừ sâu, thu hoạch trong 6 tháng. Sau đây là sản lượng lúa tối thiểu mỗi tháng mà Khang phải thu hoạch:

Tháng	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Sản lượng (ha)	40	45	60	50	55	65	45	55	50	60	45	50

Ban đầu, Hưng có 10 tấn phân bón và 8 tấn thuốc trừ sâu. Phân bón có giá 50 triệu/tấn và thuốc trừ sâu 30 triệu/tấn. Hãy lập kế hoạch gieo trồng tối ưu cho Khang.

4.3.7. (Người bán hàng) Một người bán hàng phải di chuyển qua n thành phố, mỗi thành phố đúng một lần để giao dịch. Khoảng cách từ thành phố i tới j với $i \neq j$ là c_{ij}. Tìm đường đi cho người bán hàng để giảm tối đa khoảng cách phải đi.

4.3.8. Một người đưa thư phải đi qua n địa chỉ và trở lại bưu điện. Khoảng cách từ nhà i tới j với $i \neq j$ là c_{ij}. Khoảng cách từ bưu điện tới nhà i là d_i. Hãy tìm cách để người đưa thư đi quãng đường ngắn nhất.

4.3.9. Một công ty xây dựng cần những thanh thép có độ dài $l_1, l_2, \ldots, l_m$. Công ty cần b_i thanh với độ dài l_i với $i = 1, 2, \ldots, m$. Các thanh thép dài có thể được cắt thành những thanh ngắn hơn. Trên thị trường hiện có các loại thép với độ dài $L_1, L_2, \ldots, L_n$. Hãy tìm cách đặt mua các loại thép sao cho công ty đáp ứng được nhu cầu và giảm tối đa chi phí.

4.3.10. (Bài toán phân công) Một công ty có n nhóm nhân viên và n công việc cần thực hiện. Chất lượng của nhóm i khi làm công việc j là c_{ij}. Hãy tìm cách phân mỗi nhóm đúng 1 việc và mỗi việc đúng 1 nhóm sao cho tổng chất lượng là cao nhất.

4.3.11. (Xếp lịch thi đấu) Một giải đấu bóng đá có $2n$ đội thi đấu theo thể thức vòng tròn 1 lượt. Mỗi đội thi đấu 1 trận/tuần và mỗi cặp đấu diễn ra đúng 1 lần. Theo ước tính của ban tổ chức, đội thứ k sẽ thu hút được khoảng v_k tiền lợi nhuận, bao gồm tiền vé xem trực tiếp và bản quyền truyền hình. Giả sử trận đấu giữa đội thứ i và đội thứ k sẽ thu được khoảng $v_i + v_k$ vào thứ bảy và $C(v_i + v_k)$ vào Chủ Nhật với $C > 1$. Hãy tìm cách sắp xếp để ban tổ chức thu được nhiều lợi nhuận nhất.

4.3.12. (Xếp lịch học) Một trung tâm dạy tiếng Anh mở m lớp, mỗi lớp có một dung lượng học viên nhất định. Có n học viên đăng kí vào các khóa học ở trung tâm, mỗi học viên cho biết mức độ ưa thích của mình đối với từng khóa học (mức độ yêu thích 0 cũng đồng nghĩa với việc không đăng ký). Hãy tìm cách xếp các học viên này vào các khóa học sao cho sĩ số mỗi lớp không vượt quá dung lượng của lớp đó và mức độ ưa thích tổng cộng cao nhất.

4.3.13. Liên là quản lí ở một nhà hàng. Nhà hàng của Liên hoạt động từ 9 giờ sáng đến 5 giờ chiều. Sau đây là số lượng nhân viên cần có mặt trong nhà hàng vào mỗi giờ trong ngày:

Giờ	$9-10$	$10-11$	$11-12$	$12-1$	$1-2$	$2-3$	$3-4$	$4-5$
Nhân viên	4	3	4	6	5	6	8	8

Nhà hàng sử dụng 2 loại nhân viên: Nhân viên toàn thời gian (full-time) làm từ 9am-5pm mỗi ngày, trừ 1 tiếng ăn trưa (có thể 12-1pm hoặc 1-2pm), và nhận lương 50 nghìn/giờ. Nhân viên bán thời gian (part-time) làm 4 tiếng liên tục, bắt đầu từ giờ nào cũng được và nhận lương 40 nghìn/giờ. Nhà hàng được quyền thuê tối đa 3 nhân viên part-time. Hãy giúp Liên tìm cách thỏa mãn yêu cầu về số nhân viên với chi phí tối thiểu.