

THIẾT KẾ HỆ THỐNG TÀU ĐIỆN NGẦM Ở TP.HCM

Võ Hiến Thông, Phạm Hoàng Nhật, Phan Ngọc Tiên, Trần Minh Nguyên
Mentor: Trần Hoàng Bảo Linh

August 2016

Mục lục

1	Tổng quan	2
2	Phát biểu lại bài toán	3
3	Các giả thiết, giả sử	3
4	Mô hình toán thứ nhất	4
4.1	Input và các biến	4
4.2	Các công thức và các yếu tố cần tối ưu	5
4.3	Giải quyết mô hình	6
4.4	Nghiên cứu và đánh giá mô hình	10
5	Mô hình toán thứ hai	10
5.1	Input và các biến	10
5.2	Phương pháp và thuật toán	10
5.3	Nghiên cứu, đánh giá, nhận xét	11
6	So sánh hai mô hình	12

1 Tổng quan

Tàu điện ngầm là hệ thống vận tải lớn trong đô thị, chạy trên đường ray và phần lớn chạy trong lòng đất. Tàu điện ngầm với tốc độ chở khách cao, nhiều lượt, nhiều chuyến trong ngày, lượng khách lớn, thuận tiện và thoải mái trong việc đi làm và đi lại nên đã được xây dựng ở rất nhiều các thành phố lớn trên thế giới. Riêng ở thành phố Hồ Chí Minh, dự án tàu điện ngầm được đề xuất vào năm 2001 nhưng tới năm 2007 mới được phê duyệt và hiện đang được thi công, dự kiến hoàn thành vào năm 2020.

Bài toán xây dựng hệ thống tàu điện ngầm của thành phố Hồ Chí Minh là một bài toán đã mà Ủy ban nhân dân thành phố Hồ Chí Minh đã mất rất nhiều năm để tìm ra lời giải. Để giải bài toán này, nhóm đã nghiên cứu, tính toán, tìm công thức, lập bảng, xây dựng đường đi để đưa ra hai mô hình với mục đích tối ưu độ tiếp cận của người dân đến hệ thống tàu điện ngầm. Với mỗi mô hình, nhóm đã chọn những tiêu chí, hướng đi, cách làm khác nhau để có thể đưa ra hai mô hình tối ưu về các mặt khác nhau, từ đó ta so sánh ưu điểm và nhược điểm của hai mô hình để phân tích mỗi mô hình có thể đáp ứng được tới đâu nhu cầu sử dụng của mọi người.

Ở mô hình thứ nhất, nhóm ưu tiên nổi nhiều nhất có thể các điểm quan trọng được chọn theo các tiêu chí đã đề ra từ trước, đó là những nơi đông người ở hoặc đông người qua lại. Còn ở mô hình thứ hai, nhóm xây dựng các tuyến đường với tiêu chí giảm thiểu tối đa tổng bình phương các khoảng cách từ các điểm quan trọng được chọn như trên đến tuyến đường bằng phương pháp hồi quy tuyến tính.

Sau khi đã hoàn thành xong hai mô hình, nhóm phân tích ưu nhược của cả hai mô hình: Mô hình thứ nhất đi qua nhiều điểm quan trọng nhưng khó tối ưu vì chỉ có thể thay đổi cách nối điểm, còn mô hình thứ hai thì xác định rõ ràng yếu tố tối ưu hơn mô hình một nhưng lại khó kiểm soát hình dạng của tuyến đường được xây dựng. Đồng thời, nhóm cũng đưa ra các phương hướng cải thiện cho từng mô hình theo các ưu và nhược đã được phân tích. Cuối cùng, nhóm xây dựng thử hệ thống tàu điện ngầm theo mô hình đầu tiên và đã viết thuật toán, chương trình để xây dựng mô hình thứ hai.

2 Phát biểu lại bài toán

Dự án tàu điện ngầm ở thành phố Hồ Chí Minh được đề xuất vào năm 2001 nhưng tới năm 2007 mới được phê duyệt và hiện đang được thi công, dự kiến hoàn thành vào năm 2020.



Đây là 1 dự án quan trọng nhằm giải quyết nhiều vấn đề giao thông của thành phố. Bài toán chúng ta cần giải quyết là xây dựng mô hình hệ thống tàu điện ngầm phù hợp và tối ưu nhất.

Mô hình toán học cần cho ra bản đồ hệ thống các vị trí của ga tàu điện ngầm và các tuyến đường tàu điện ngầm phù hợp đảm bảo với các yêu cầu sau:

- Tất cả các quận chính trên địa bàn thành phố đều có ít nhất một tuyến đi qua.
- Có không quá 6 tuyến đường tổng cộng (có 6 tuyến như trong kế hoạch thành phố dự kiến của thành phố).
- Có thể giả sử hệ thống tàu điện ngầm có thể được xây dựng độc lập với hệ thống giao thông bình thường hiện nay.

3 Các giả thiết, giả sử

Với bài toán xây dựng hệ thống tàu điện ngầm sẽ có nhiều yếu tố ta không thể tính tới và kiểm soát được nên ta đề ra một số giả thiết, giả sử để đơn giản hóa bài toán.

- Giả sử quá trình xây dựng không gặp khó khăn, các tuyến đường đều có thể xây dựng được theo mô hình. Có thể cho các tuyến đường không thể xây dựng được dưới lòng đất đều có thể xây dựng được trên mặt đất.
- Ta không xét đến những sự cố kỹ thuật về đường ray, tàu, máy móc,... ta có thể gặp và những tai nạn chưa biết trước.
- Ta giả sử người trong phạm vi bán kính 4 km với tâm xét từ trạm tàu điện ngầm gần nhất có thể di chuyển được đến trạm.

4 Mô hình toán thứ nhất

Gọi tất cả tuyến đường ta sẽ lập là một đồ thị $G(V, E)$. Đồ thị $G(V, E)$ sẽ là một đồ thị liên thông.

4.1 Input và các biến

Đầu tiên ta chọn những điểm quan trọng trong thành phố, trong đó có 10 điểm nằm ở biên (điểm ngoại biên).

1. Bến xe An Sương (Hóc Môn)
2. Thanh Xuân (quận 12)
3. Gò Dưa (Thủ Đức)
4. Suối Tiên (quận 9)
5. Khu du lịch BCR (quận 9)
6. Cát Lái (quận 2)
7. Huyện Nhà Bè
8. Bến xe khách quận 8
9. Bến xe miền Tây
10. Bình Hưng Hòa (quận Bình Tân, gần quốc lộ 1A)

Tiếp theo, ta nối 10 điểm ngoại biên theo từng cặp thành 5 đường (gọi là đường cơ bản).

- Đường 1: Nối 1-6: Bến xe An Sương - Cát Lái
- Đường 2: Nối 2-7: Thanh Xuân - huyện Nhà Bè
- Đường 3: Nối 3-8: Gò Dưa - Bến xe khách quận 8
- Đường 4: Nối 4-9: Suối Tiên - Bến xe miền Tây
- Đường 5: Nối 5-10: Khu du lịch BCR - Bình Hưng Hòa

Ta chọn những địa điểm quan trọng còn lại trong thành phố dựa theo một số tiêu chí như đông người qua lại, đông người cư ngụ hay có vai trò quan trọng như công sở, trường học, khu dân cư, bến xe rồi lập bảng đánh giá thứ tự độ quan trọng của từng địa điểm đã chọn bằng hàm độ quan trọng được tính theo công thức ở dưới. Coi mỗi địa điểm là một điểm trên bản đồ. Chú ý nếu hai địa điểm quá gần nhau ta có thể lấy một điểm tương trưng cho cả hai. Ta dùng công cụ **Google Map** để xác định tọa độ của từng điểm, hoặc cũng có thể sử dụng hệ tọa độ pixel của một chương trình chỉnh sửa hình ảnh nào đó như **Paint**. Sau đó ta phân các điểm thành 5 nhóm dựa vào khoảng cách từ điểm đó đến các đường cơ bản. Các điểm có khoảng cách gần nhất với đường i ($1 \leq i \leq 5$) sẽ được xếp vào nhóm i .

THÔNG TIN CHI TIẾT VỀ CÁC ĐIỂM ĐƯỢC ĐÁNH DẤU											
STT	Điểm	Mật độ (ngườ/km ²)	Quận/huyện	Đặc điểm	Chỉ chú	Hệ số mật độ	Độ nổi tiếng	Độ quan trọng	Quy đổi	Độ nổi tiếng	
1	Bến xe An Suông	3,285	Hóc Môn	bến xe		3.516535374		3	3.258267687	bến xe	3
2	Thanh Xuân	8,058	12	địa phương	Điểm cực biên	3.906238415		3	3.453118208	địa phương	3
3	Gò Dưa	9,498	Thủ Đức	địa phương	Điểm cực biên	3.977627402		3	3.488813701	địa phương	2
4	Suối Tiên	25,495.25	Tân Phú	du lịch	Điểm cực biên	4.406459275		2	3.203229637	khu công nghiệp	4
5	Khu du lịch BCR	2,311	9	du lịch	Điểm cực biên	3.363852693		2	2.681926347	cảng hàng không	3
6	Khu công nghiệp Cát Lái 2	2,812.42	2	Khu công nghiệp	Điểm cực biên	3.449001778		4	3.724540089	khu dân cư	5
7	Nhà Bè	1,034	Nhà Bè	địa phương	Điểm cực biên	3.014520539		3	3.007260269	đại học	4
8	Bến xe quận 8	22,051	8	bến xe	Điểm cực biên	4.343419997		3	3.671709998	mua bán	2
9	Bến xe miền Tây	11,448.75	Bình Tân	bến xe	Điểm cực biên	4.058758072		3	3.529379036		
10	Bình Hưng Hoà	11,448.75	Bình Tân	địa phương	Điểm cực biên	4.058758072		3	3.529379036		
11	Khu công nghiệp Tân Bình	25,495.25	Tân Phú	khu công nghiệp		4.406459275		4	4.203229637		
12	Tân Sơn Nhất	19,565	Tân Bình	cảng hàng không		4.291485906		3	3.645742953		
13	Khu dân cư 12	27,407.25	Gò Vấp	khu dân cư		4.437865461		5	4.718932731		
14	Chung cư Tam Phú	9,498	Thủ Đức	khu dân cư		3.977627402		5	4.488813701		
15	Đại học Ngân hàng	9,498	Thủ Đức	đại học		3.977627402		4	3.988813701		
16	Khu dân cư Tre xanh	2,311	9	khu dân cư		3.363852693		5	4.181926347		
17	Khu dân cư Hưng Phú	2,311	9	khu dân cư		3.363852693		5	4.181926347		
18	Khu chế xuất tân thuận	7,634	7	khu công nghiệp		3.882758477		4	3.941379238		
19	Khu đô thị Phú Mỹ Hưng	7,634	7	khu dân cư		3.882758477		5	4.441379238		
20	Khu dân cư ven sông	7,634	7	khu dân cư		3.882758477		5	4.441379238		
21	Đại học Y dược	43,538.50	5	đại học		4.638873463		4	4.319436731		
22	Đầm Sen	46,507.20	11	du lịch		4.667520193		2	3.333760097		
23	Đại học Luật	45,815.25	4	đại học		4.661010061		4	4.33050503		
24	Chợ Bến Thành	23,429	1	du lịch + mua bán		4.369760704		4	4.184880352		
25	Đại học Mở	37,789	3	đại học		4.577365399		4	4.2888827		
26	Đại học Sư phạm CS2	37,789	3	đại học		4.577365399		4	4.2888827		
27	Cư xá Phan Đăng Lưu	22,384	Bình Thạnh	khu dân cư		4.349928458		5	4.674964229		
28	Khu dân cư Cầu Kinh	22,384	Bình Thạnh	khu dân cư		4.349928458		5	4.674964229		
27	Cư xá Phan Đăng Lưu	22,384	Bình Thạnh	khu dân cư		4.349928458		5	4.674964229		
28	Khu dân cư Cầu Kinh	22,384	Bình Thạnh	khu dân cư		4.349928458		5	4.674964229		
29	Chung cư An Cư	2,812.42	2	khu dân cư		3.449080178		5	4.224540089		
30	Chung cư Đức Khải	2,812.42	2	khu dân cư		3.449080178		5	4.224540089		
31	Khu đô thị Sala	2,812.42	2	khu dân cư		3.449080178		5	4.224540089		
32	Đại học Bách Khoa	38,742	10	đại học		4.5881783		4	4.29408915		
33	Đại học Sư phạm Kỹ thuật	35,035	Phủ Nhuan	đại học		4.544502122		4	4.272251061		

4.2 Các công thức và các yếu tố cần tối ưu

Hàm tối ưu: Độ quan trọng của các điểm trên tuyến đường. (công thức tính được nêu ở dưới). **Yếu tố cần tối ưu (đối với 5 tuyến đường thẳng)**: số lượng người tiếp cận được các trạm tàu điện ngầm, mật độ dân số mỗi trạm bao phủ trong bán kính 4 km.

Yếu tố cần tối ưu (đối với tuyến đường tròn): số trạm mỗi người phải chuyển để đến được một nơi và giảm quá tải ở trạm trung tâm. **Các công thức**: dựa vào bảng số liệu về dân số và diện tích mỗi quận, ta tính được mật độ dân số từng quận, huyện. Gọi a_x là mật độ dân số của vùng x (đơn vị: người/ km^2), t là độ nổi tiếng của x , ta có công thức tính độ quan trọng của các điểm ta đã chọn theo công thức sau:

$$\varphi(x_i) = (m_i) * \alpha_i + (1 - m_i) * \log(a_i)$$

Với m_i là hệ số tỉ lệ ($0 < m < 1$)
 α_i là độ nổi tiếng ($\alpha_i > 1$)
 a_i là mật độ dân số (đơn vị: người/km²)

4.3 Giải quyết mô hình

Trong mỗi nhóm, ta xếp thứ tự các điểm bằng cách hạ các đường vuông góc từ các điểm trong nhóm đến đường cơ bản của nhóm. Khoảng cách từ các điểm đến các đường thẳng được tính theo công thức sau: (chúng ta sẽ sử dụng thuật toán để tính khoảng cách của từng điểm đến với đường tương ứng).

$$d_i = \frac{|a_i x + b_i y|}{\sqrt{a_i^2 + b_i^2}}$$

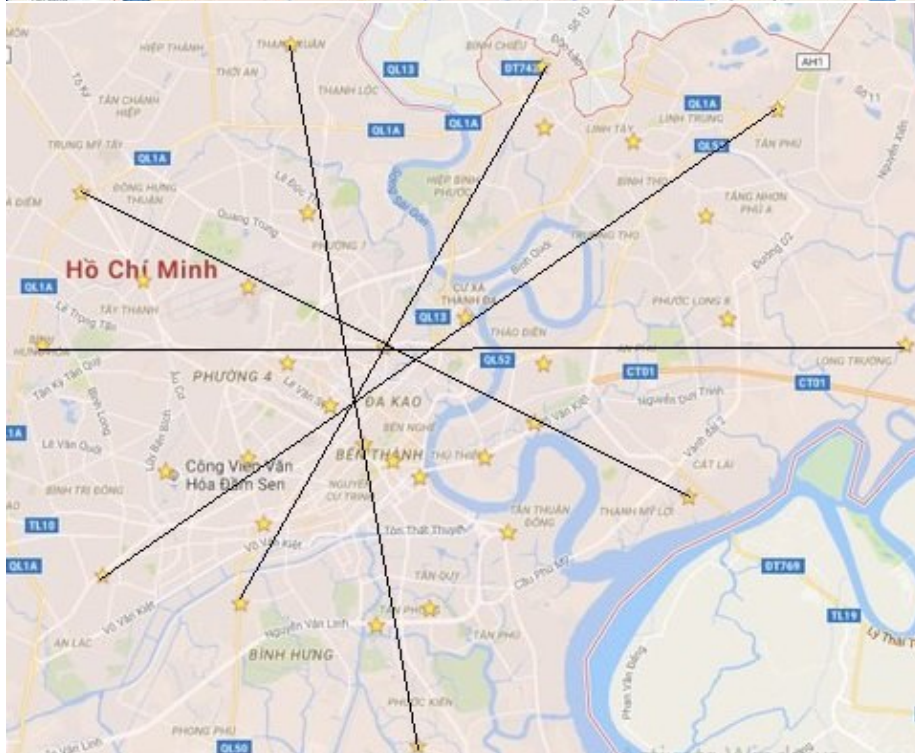
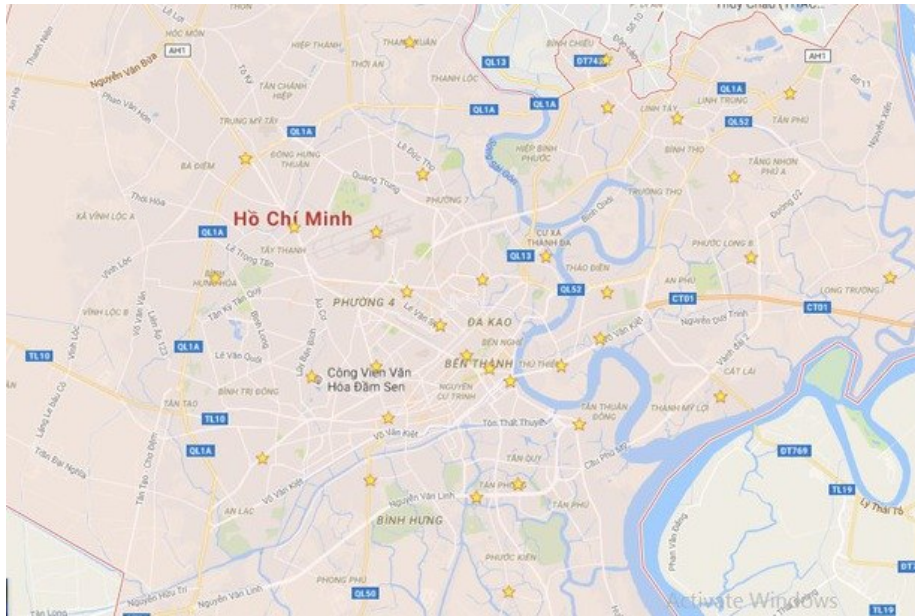
Trong đó:

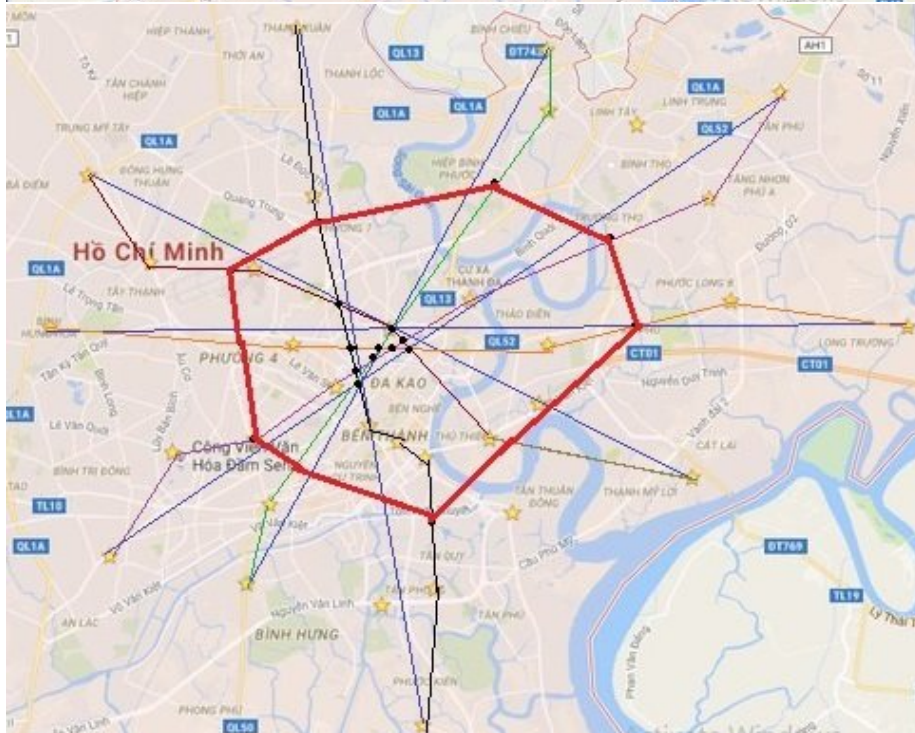
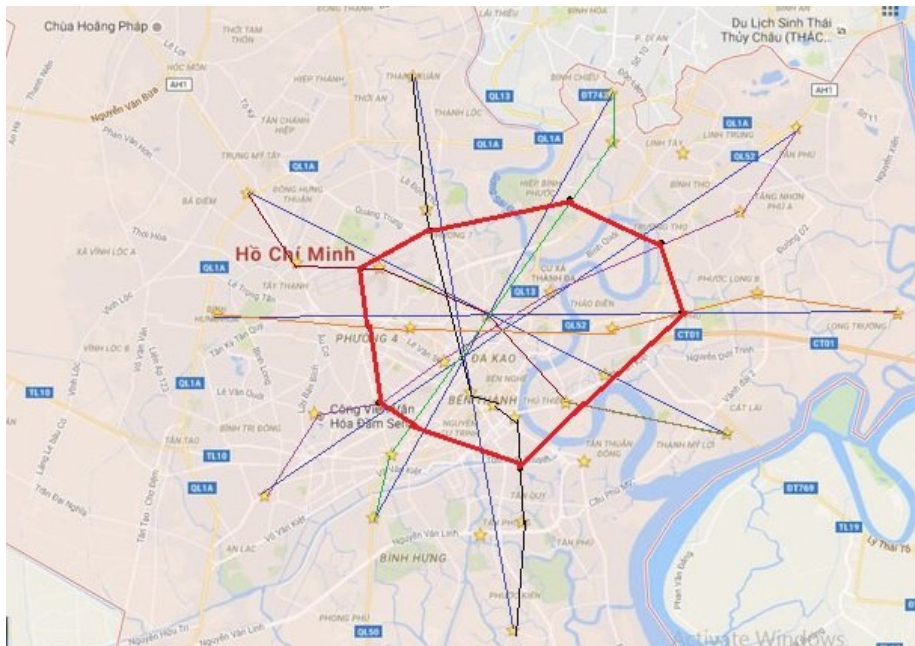
- d_i là khoảng cách từ điểm i đến đường thẳng gần nhất.
- (a_i, b_i) là vectơ chỉ phương của đường thẳng

Sau khi đã sắp xếp thứ tự, ta lần lượt nối các điểm này lại theo thứ tự các chân đường vuông góc. Nếu có hai đường có góc ở giữa quá xấu (quá lệch so với 180°, 45° hoặc 90°), ta bỏ bớt một điểm dựa trên hàm quan trọng. Điểm nào có độ quan trọng lớn hơn thì sẽ được giữ lại. Sau khi đã có các tuyến đường thẳng, ta sẽ tìm cách đặt thêm trạm. Có thể xây dựng các trạm này bằng cách chia đều tuyến đường sao cho mỗi trạm cách nhau một khoảng cách phù hợp. Ngoài ra, giao điểm của các tuyến sẽ tạo thành các điểm trung tâm, ở đây ta cũng đặt trạm, gọi là trạm trung tâm.

Đối với tuyến đường tròn, ta sẽ xây dựng dựa trên các trạm sẵn có. Có thể thấy nếu người dân sống ở ngoài đường tròn, họ sẽ có xu hướng sử dụng tuyến đường tròn (do khoảng cách gần hơn), còn nếu họ sống trong đường tròn thì họ sẽ có xu hướng đi vào tâm rồi đi ngược ra (do ít phải chuyển tuyến hơn, giảm khả năng phải đợi chuyển xe tiếp theo ở tuyến đường tròn). Do mục đích của tuyến đường tròn là giảm quá tải ở trung tâm, trên mỗi tuyến ta có thể chọn 2 điểm sao cho đường đi từ mỗi điểm đến điểm biên gần nó hơn bằng khoảng một phần tư độ dài của tuyến đường. Khi đã có 10 điểm như vậy, ta nối tất cả lại để tạo thành tuyến đường tròn.







4.4 Nghiên cứu và đánh giá mô hình

Mô hình này ưu tiên việc các tuyến đường phải đi qua các điểm đã được chọn từ ban đầu, đặc biệt là những điểm có độ quan trọng cao. Từ đó ta có thể thấy mô hình một sẽ là tuyến đường đi qua nhiều tuyến đường cần thiết và đáp ứng được nhu cầu của nhiều người.

Tuy nhiên, mô hình này cũng có những bất lợi như sau:

- Tuyến đường sẽ quá xa so với một số điểm quan trọng vì phải ưu tiên cho các điểm có độ quan trọng lớn hơn.
- Việc cố định các trạm khiến cho việc tối ưu hoá trở nên khó khăn, do chỉ có thể thay đổi cách nối.

Để giải quyết phần nào các vấn đề này, ta có thay việc cố định các trạm bằng việc xây dựng tuyến đường trước rồi mới đặt trạm dọc trên tuyến đường (như ở mô hình 2). Ngoài ra, hàm độ quan trọng có thể được xây dựng một cách tối ưu hơn bằng phương pháp thăm dò ý kiến của người dân để thay đổi hệ số nổi tiếng. Đối với tuyến tròn, ta cũng có thể chọn các trạm trên các tuyến thẳng sao cho tổng số người có thể tiếp cận các trạm bên ngoài đường tròn bằng với bên trong thay vì chỉ xét khoảng cách. Cuối cùng, để tránh việc có quá nhiều các trạm ở giữa được tạo thành do các tuyến thẳng cắt nhau, ta có thể chọn 3 điểm làm các trạm trung tâm rồi cho 2 đường đi qua mỗi điểm thay vì cho cắt tự do như ở mô hình.

5 Mô hình toán thứ hai

: Để giải quyết các vấn đề phát sinh trong mô hình một và tối ưu hoá khoảng cách từ các điểm đông dân đến các tuyến đường điện ngầm, ta đưa ra một mô hình với phương pháp tiếp cận khác.

5.1 Input và các biến

: Đầu tiên, ta cũng chọn 10 điểm ngoại biên, phân loại và xếp thứ tự các điểm còn lại tương tự như mô hình đầu. Tuy nhiên, thay vì tìm cách nối các điểm đã được chọn, ta tạo ra các đường sao cho tổng bình phương các khoảng cách từ các điểm đã được chọn đến đường đó là ngắn nhất.

5.2 Phương pháp và thuật toán

Ý tưởng sắp xếp đường này có thể nói là được ứng dụng từ lý thuyết **trend line** trong xác suất thống kê.

Phương pháp kẻ đường này được giải như sau: Ta đặt các điểm được đánh dấu trên bản đồ lên một hệ tọa độ Oxy (sử dụng tọa độ đã lấy từ ứng dụng **Google Map**) rồi vẽ từng đường "trend line" của từng nhóm điểm đã được phân loại bằng **phương pháp hồi quy tuyến tính**. Tuy nhiên, nếu ta chỉ dừng lại ở đây thì các đường thẳng thu được có thể sẽ quá lệch so với tập

hợp điểm. Để giải quyết vấn đề này, ta có thể “ngắt khúc” tuyến đường bằng cách cập nhật liên tục trendline với **thuật toán** như sau: ta lần lượt thêm một điểm vào nhóm điểm đang xét rồi lần lượt kẻ trend line của nhóm điểm mới này, sau đó tính đại lượng R^2 (*coefficient of determination - hệ số xác định*) của các điểm tới trend line đó. Nếu giá trị của đại lượng này nhỏ hơn một hằng số chọn trước, ví dụ như 0.8, ta bỏ điểm vừa thêm vào, kẻ trend line của nhóm điểm này, rồi chọn điểm vừa bị bỏ đi làm điểm bắt đầu mới. Ngược lại, ta lại lặp lại thuật toán. Với điểm khởi đầu đầu tiên là một trong hai “mút” của đường cơ bản, sau khi kết thúc thuật toán, ta sẽ được **một đường gấp khúc vừa tối ưu về mặt khoảng cách đến các điểm đồng dân, nhưng cũng không quá lệch so với tập điểm**. Sau khi đã hoàn thành các tuyến đường, ta có thể xây dựng các trạm bằng 2 cách:

1. Hạ đường vuông góc từ mỗi điểm đến đoạn đường gần nhất với nó. Nếu có hai chân đường vuông góc quá gần nhau (khoảng cách giữa 2 trạm thường là 700 - 1300 m). Nếu trên tuyến đường khoảng cách giữa các trạm còn thừa ta có thể chia đều các tuyến đường thành các trạm, miễn sao các trạm không quá khít nhau.
2. Chia đều từng đoạn đường với mỗi đoạn đường có độ dài trung bình từ 700-1300 m và dựng trạm ở các điểm đã chia.

Đối với **tuyến đường tròn**, ta sẽ xây dựng dựa tương tự như mô hình một.

5.3 Nghiên cứu, đánh giá, nhận xét

Mô hình thứ hai giải quyết các vấn đề của một bằng cách tạo ra đường gần sát nhất (best-fit) với các nhóm điểm để làm tuyến đường, làm tuyến đường có tính cơ động cao hơn.

Tuy nhiên mô hình hai cũng có những nhược điểm sau:

- không đảm bảo được tính ưu tiên cho các điểm quan trọng
- Dễ tạo ra các đường gấp khúc quá nhiều dẫn đến việc khó kiểm soát hình dạng hình học của đường do đường được sinh ra theo một tập điểm cho trước.

Để giải quyết các vấn đề của mô hình thứ 2, ta có thể có những cách sau:

- Bỏ bớt điểm để giảm độ phức tạp (có thể sử dụng hàm quan trọng được định nghĩa ở mô hình 1)
- Cố định số lần gấp khúc, chia các điểm ở mỗi nhóm theo số lần gấp khúc rồi vẽ trend line cho các nhóm nhỏ hơn này.
- Ta cũng có thể thử các giá trị R^2 khác nhau với lưu ý là R^2 càng gần 1 thì đường càng chính xác nhưng sẽ càng nhiều gấp khúc vì điều kiện khó thoả hơn, còn càng thấp thì càng ít gấp khúc nhưng lại càng thiếu chính xác với nhóm điểm.

- Một hướng cải tiến khác là sau khi ta đã tạo được các tuyến đường, ta có thể đưa thêm vào các tiêu chí hình học (như trong bài báo *metromulticriteria* để chỉnh lại hình dạng của đường một cách hợp lý.
- Ta cũng có thể thay mô hình “tổng các bình phương từ điểm đến tuyến nhỏ nhất” (Ordinary Least Squares) bằng các mô hình hồi quy tuyến tính thoả mãn các điều kiện tối ưu khác.

6 So sánh hai mô hình

Mỗi mô hình đều có những ưu và nhược riêng. Những ưu và nhược này sẽ phụ thuộc vào từng trường hợp cụ thể với các input khác, chẳng hạn cách chọn các điểm quan trọng có thể khiến các ưu nhược được thể hiện rõ ràng hơn. Nói chung, mô hình thứ hai có tính “cơ động” hơn mô hình thứ nhất vì không phải cố định các trạm trước khi tạo ra tuyến đường, đồng thời yếu tố tối ưu ở mô hình thứ hai được thể hiện một cách tường minh hơn qua đại lượng tổng bình phương các khoảng cách từ các điểm quan trọng đến tuyến đường. Tuy nhiên, mô hình thứ nhất dễ kiểm soát hơn mô hình thứ hai vì có thể bỏ điểm dựa trên hàm quan trọng, đồng thời phương pháp xây dựng rõ ràng và dễ thực hiện hơn.

Thuật toán phân loại điểm:

```
void hchieu(float a, float b, float c, float x, float y, int& yhc)
{
    yhc=(a*a*y-a*b*x-b*c)/(a*a+b*b);
}
int main()
{
    float bien1 , bien2 , q, a, b, c;
    cout<<"Nhap_vao_tung_do_bien_1_cua_duong_thang:_";
    cin>>bien1;
    cout<<"Nhap_vao_tung_do_bien_2_cua_duong_thang:_";
    cin>>bien2;
    if ( bien1<bien2)
        q=bien2;
    else q=bien1;
    cout<<"Nhap_vao_he_so_cua_duong_thang:_";
    cin>>a>>b>>c;
    int* p, * x, * y, * miny;
    int* yhc ;
    int j, t;
    cout<<"So_luong_diem_muon_nhap:_";
    cin>>j;
    x= new (nothrow) int [j];
    y= new (nothrow) int [j];
    yhc= new (nothrow) int [j];
    miny=new (nothrow) int [j];
    if (miny==0||x==0||y==0||yhc==0)
        cout<<"Error:memory_could_not_be_allocated";
    else
    {
        for (int i=1;i<j+1;i++)
        {
            cout<<"Nhap_vao_toa_do_diem_thu_"<<i;
            hchieu(a,b,c,x[i-1],y[i-1],yhc[i-1]);
        };
        for (int i=1;i<j+1;i++)
        {
            miny[i-1]=q;
            for (int k=1;k<j+1;k++)
            {
                if (miny[i-1]>yhc[k])
                {
                    miny[i-1]=yhc[k];
                    t=k;
                }
            }
        }
    }
}
```



```

        miny[i-1]=q;
        for (int k=1;k<j+1;k++)
        {
            if (miny[i-1]>yhc[k])
            {
                miny[i-1]=yhc[k];
                t=k;
            }
            cout<<t;
        }
    }
}

```

Thuật toán xác định đường trend line:

```

void trendline(double * x,double * y,int n,double m, double k)
{
    double a,b,c,d,e,f;
    double S=0,Sx=0,Sy=0,Sx2=0;
    for (int i=0;i<n;i++)
    {
        S=S+x[i]*y[i];
        Sx=Sx+x[i];
        Sy=Sy+y[i];
        Sx2=Sx2+x[i]*x[i];
    }
    a=n*S;
    b=Sx*Sy;
    c=n*Sx2;
    d=Sx*Sx;
    m=(a-b)/(c-d);
    e=Sy;
    f=m*Sx;
    k=(e-f)/n;
}

```

Thuật toán tính Rsquared:

```

double RSquare(int* x, int *y,int n,double a,double b)//a,b la he so cua y=ax+b
{
    double Sy=0;
    double S2=0;
    double M=0;
    for (int i=0;i<n;i++)
    {

```



```

        cout<<"Nhap_vao_toa_do_diem_"<< i+1<<"_";
        cin>>x[i]>>y[i];
        Sy=Sy+y[i];
        S2=S2+(y[i]-(a*x[i]+b))*(y[i]-(a*x[i]+b));
    }
    for (int i=0;i<n;i++)
    {
        M=M+(y[i]-Sy/n)*(y[i]-Sy/n);
    }
    double R=1-S2/M;
    return R;
}

```

Thuật toán tìm đường đi tối ưu nhất:

```

void RSquare(int* x, int *y, int n, double a, double b, double R)
//a,b la he so cua y=ax+b la duong trendline
{
    double Sy=0;
    double S2=0;
    double M=0;
    for (int i=0;i<n;i++)
    {
        cout<<"Nhap_vao_toa_do_diem_"<< i+1<<"_";
        cin>>x[i]>>y[i];
        Sy=Sy+y[i];
        S2=S2+(y[i]-(a*x[i]+b))*(y[i]-(a*x[i]+b));
    }
    for (int i=0;i<n;i++)
    {
        M=M+(y[i]-Sy/n)*(y[i]-Sy/n);
    }
    R=1-S2/M;
    cout<<"RSquare="<<R;
}

```

Tài liệu

- [1] Lê Việt Hải, Cần Trần Thành Trung, Trần Hoàng Bảo Linh, Hồ Quốc Đăng Hưng, Phạm Tấn Anh Quân, Nguyễn Vĩnh Khang. *Tài liệu Pima*.
- [2] Thông tin tàu điện ngầm ở TP.HCM
taudienngam.net
- [3] Hệ thống tàu điện ngầm của một số thành phố lớn
<http://glantz.net/blog/the-worlds-best-designed-metro-maps>
- [4] Hệ thống tàu điện ngầm của một số thành phố lớn
<http://glantz.net/blog/the-worlds-best-designed-metro-maps>
- [5] Dân số của các quận TP.HCM
<http://muahangtrenebay.com/thanh-pho-ho-chi-minh-sai-gon-co-bao-nhieu-quanhuyen.html>
- [6] Coefficient of determination
https://en.wikipedia.org/wiki/Coefficient_of_determination
- [7] Jonathan M. Stott, Peter Rodgers *Metro Map Layout Using Multicriteria Optimization*. University of Kent, UK.
- [8] A* search algorithm
https://en.wikipedia.org/wiki/A*_search_algorithm
- [9] Martin Nollenburg and Alexander Wolff *Drawing and Labeling High-Quality Metro Maps by Mixed-Integer Programming*
- [10] Michael A. Bekos, Michael Kaufmann, Katerina Potika, Antonios Symvonis *Line Crossing Minimization on Metro Maps*
- [11] Masoud Yaghini, Hasti Jafari *A mathematical model for finding the optimal locations of railway stations*