Đại số tuyến tính
Linear Algebra

Nguyễn Vĩnh Khang

Tháng 7, 2017

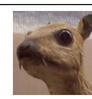
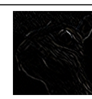
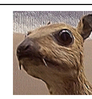
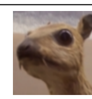
Mục lục

1 Mở đầu

Ma trận, thường được hình dung là bảng, được áp dụng rất nhiều nơi. Từ việc đơn thuần giải toán như hệ 2 phương trình 2 ẩn quen thuộc

$$\begin{cases} 2x+3y & =5 \\ x+y & =2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Hay việc xử lý hình ảnh thông qua việc áp dụng ma trận (tham khảo từ Wikipedia `https://en.wikipedia.org/wiki/Kernel_(image_processing)`)

Phép toán	Ma trận biến đổi	Hình ảnh
Đồng nhất (giữ nguyên hình ảnh)	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	
Phát hiện cạnh	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	
Làm sắc nét	$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	
Phép làm mở kiểu Gauss (Gaussian blur)	$\frac{1}{16}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	

Ma trận xác suất cho chuỗi Markov, như việc dự đoán các loại khoản vay chiếm bao nhiêu % trong dài hạn, phân ra làm 4 loại:

- Nợ tốt (A): Khách hàng luôn trả nợ trong khoảng thời gian cho phép
- Nợ rủi ro (B): Khách hàng có thể không có khả năng trả nợ
- Nợ xấu (C): Khách hàng không có khả năng trả nợ
- Nợ đã trả (D): Khách hàng đã trả nợ

Khi khảo sát, cứ sau 1 chu kỳ (thường là 1 tháng hoặc 1 quý):

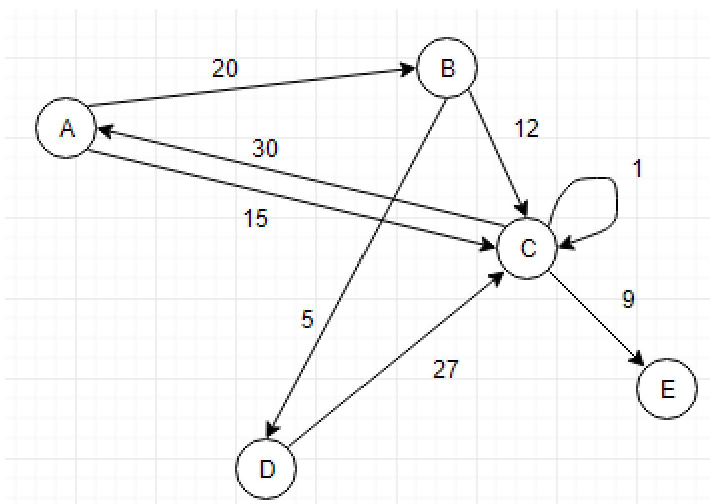
- Nợ tốt: 22% được hoàn trả ($A \to D$), 3% thành nợ xấu ($A \to C$), 5% nợ tốt thành nợ rủi ro ($A \to B$)
- Nợ rủi ro: 5% được hoàn trả ($B \to D$), 35% thành nợ xấu ($B \to C$), 5% thành nợ tốt ($B \to A$)
- Nợ xấu: 100% $C \to C$
- Nợ đã trả: 100% $D \to D$

Ma trận xác xuất / trạng thái cho các loại nợ (hàng → cột):

$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \;A\; & \;\;B\;\; & \;\;C\;\; & \;\;D\; \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0.7 & 0.05 & 0.03 & 0.22 \\ 0.05 & 0.55 & 0.35 & 0.05 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Từ ma trận, ta có kết luận trong thời gian đủ dài (bất kể thành phần phần trăm của mỗi loại nợ ban đầu) chỉ còn 2 loại nợ: nợ đã trả, hoặc nợ xấu!
Chuỗi Markov cũng thường được dùng trong các trò chơi rủi ro hay xác suất.

Ma trận kề biểu diễn đường bay giữa các thành phố (hàng là điểm xuất phát, cột là điểm đến)



$$\begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \end{array} \\ \begin{pmatrix} 0 & 20 & 15 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 12 & 5 & 0 \\ 30 & 0 & 1 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 27 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

2 Định nghĩa

Một ma trận $m \times n$ (dòng $\times$ cột) trên một tập hợp $\mathbb{F}$ là một bảng hay mảng gồm m dòng và n cột, thường được viết

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ hoặc } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Dạng rút gọn

$$A = (a_{ij})_{m \times n}$$

Tập tất cả các ma trận $m \times n$ với các hệ số a_{ij} thuộc $\mathbb{F}$ được ký hiệu là $\mathbb{F}^{m \times n}$. Khi $n = 1$, ta có thể viết $\mathbb{F}^{m \times 1} = \mathbb{F}^m$

Lưu ý: Thông thường các phần tử trong tập $\mathbb{F}$ có thể "cộng"và "nhân"với nhau được, ví dụ như tập số thực $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ hoặc tập số phức $\mathbb{F} = \mathbb{C}$

2.1 Hai ma trận bằng nhau

Phần tử ở dòng i cột j của một ma trận A được ký hiệu chung là

$$A_{ij}$$

Hai ma trận A và B được gọi là ***bằng nhau*** (ký hiệu $A = B$) nếu và chỉ nếu chúng có **cùng chiều**

$$A, B \in \mathbb{F}^{m \times n}$$

và các hệ số **tương ứng** bằng nhau

$$A_{ij} = B_{ij}, \forall 1 \leq i \leq m, 1 \leq j$$

2.2 Ma trận dòng, ma trận cột, và các loại ma trận khác

Ma trận **dòng** được định nghĩa là ma tran có kích cỡ $1 \times n$ và ma trận **cột** (hay còn gọi là vectơ/vector) có kích cỡ $m \times 1$.

Ma trận **vuông** là ma trận mà số dòng bằng số cột. Ma trận **chéo** là ma trận vuông mà tất cả các hệ số $= 0$ ngoại trừ các hệ số trên đường chéo.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Ma trận **tam giác trên** là ma trận vuông mà tất cả các hệ số **dưới** đường chéo $= 0$. Ma trận **tam giác dưới** là ma trận vuông mà tất cả các hệ số **trên** đường chéo $= 0$.

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Lưu ý: Đôi khi, nếu chúng ta bao quanh ma trận A bằng ngoặc vuông [ ] (không phải ngoặc tròn) thì có thể viết ma trận cột

$$\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} = (a_1, a_2, \dots, a_m)$$

Với một ma trận $A = (a_{ij})_{m \times n}$, ký hiệu dòng thứ i của A là một ma trận dòng $1 \times n$

$$\mathrm{row}_i(A) = \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \end{bmatrix}$$

và cột thứ j của A là một ma trận cột $m \times 1$

$$\mathrm{col}_j(A) = \begin{bmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{bmatrix}$$

và ta có thể rút gọn $a_{ij} = (\mathrm{row}_i(A))_{1j} = (\mathrm{row}_i(A))_j$ cũng như $a_{ij} = (\mathrm{col}_j(A))_{i1} = (\mathrm{col}_j(A))_i$

Khi đó ta có thể kết hợp những ma trận cột và dòng lại để thành A

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{col}_1(A) & \mathrm{col}_2(A) & \cdots & \mathrm{col}_n(A) \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \mathrm{row}_1(A) \\ \hline \mathrm{row}_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{row}_m(A) \end{array}\right]$$

*VD1: Nếu

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, b = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix}, c = \begin{bmatrix} 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, d = \begin{bmatrix} 10 & 11 \end{bmatrix} \; e = \begin{bmatrix} 12 \\ 13 \\ 14 \\ 15 \end{bmatrix}$$

thì

$$\left[\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{d} & \\ \cline{1-2} a & b & \text{e} \\ \hline \multicolumn{3}{c}{c} \end{array}\right] = \begin{bmatrix} 10 & 11 & 12 \\ 1 & 4 & 13 \\ 2 & 5 & 14 \\ 3 & 6 & 15 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

*VD2: Chúng ta có thể ghép cả ma trận với nhau nếu chiều của chúng tương thích với nhau. Nếu

$$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, O_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, R = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ f & g \\ 0 & h \end{bmatrix}$$

thì

$$T = \left[\begin{array}{c|c} I & \\ \hline Z & \end{array} \text{R} \;\right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \\ 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & h \end{bmatrix}$$

2.3 Chuyển vị

Ma trận chuyển vị của $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, ký hiệu là A^T là một ma trận $n \times m$ mà

$$(A^T)_{ij} = A_{ji}$$

Tính chất:

$$\text{row}_j(A^T) = (\text{col}_j(A))^T, \text{col}_i(A^T) = (\text{row}_i(A))^T$$

3 Tính toán

Như số thực (hay số phức), ma trận có thể cộng và nhân với nhau được

3.1 Tổng ma trận

Để cộng 2 ma trận A và B, chúng phải cùng chiều. Khi đó tổng 2 ma trận, $A + B$, sẽ được tính bằng

$$(A + B)_{ij} = A_{ij} + B_{ij}$$

3.2 Tích vô hướng ma trận với một số

Cho $c \in \mathbb{F}$ (tập số thực hoặc số phức) và $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, phép nhân vô hướng A với c (hoặc c với A) là

$$(cA)_{ij} = c(A)_{ij}$$

3.3 Tích 2 ma trận

Cho $\mathbf{A} \in \mathbb{F}^{\mathbf{m\times n}}$ và $\mathbf{B} \in \mathbb{F}^{\mathbf{n\times p}}$ thì phép nhân 2 ma trận sẽ cho ra một ma trận $\mathbf{AB} \in \mathbb{F}^{\mathbf{m\times p}}$ với

$$(AB)_{ij} = A_{i1}B_{1j} + A_{i2}B_{2j} + \cdots + A_{in}B_{nj}$$

1 cách để ghi nhớ được công thức này là xét từng vị trí của hệ số trong AB: hệ số ở hàng i cột j bằng với hàng i của A nhân với cột j của B.
Và như thế nào là nhân hàng với cột? Chúng ta nhân từng phần tử tương ứng rồi cộng với nhau: $a = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \end{bmatrix}$, $b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$

$$ab = a_1b_1 + a_2b_2 + \cdots + a_nb_n$$

Lưu ý: Tích AB tồn tại (với định nghĩa trên), nhưng không có nghĩa tích BA tồn tại. Và $AB \neq BA$ trong trường tổng quát (ngay cả khi AB và BA tồn tại và chúng có cùng kích cỡ)
*VD:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$AB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3.4 Ma trận không và ma trận đơn vị

*Ma trận không (ký hiệu 0) $m \times n$:

$$0_{ij} = 0$$

*Ma trận đơn vị (ký hiệu I hoặc I_n) là một ma trân chéo $n \times n$ với hệ số trên đường chéo = 1:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

hoặc

$$(I)_{ij} = \delta_{ij}$$

Với δ_{ij} được gọi là Kronecker delta và có giá trị là

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{nếu } i = j \\ 0 & \text{nếu} i \neq j \end{cases}$$

3.5 Tính chất

1. Phép cộng có tính *giao hoán* và *kết hợp*:

$$A + B = B + A$$

$$(A + B) + C = A + (B + C)$$

$$(A, B, C \in \mathbb{F}^{m \times n})$$

2. Phép nhân vô hướng có tính *phân phối*:

$$c(A + B) = cA + cB$$

$$(c_1 + c_2)A = c_1 A + c_2 A$$

$$(c, c_1, c_2 \in \mathbb{F},\ A, B \in \mathbb{F}^{m\times n})$$

3. $c(AB) = (cA)B = A(cB)$
4. $(c_1c_2)A = c_1(c_2A)$ $(c_1, c_2 \in \mathbb{F},\ A \in \mathbb{F}^{m\times n})$ và $1A = A$
5. Phép nhân 2 ma trận tuy *không* giao hoán nhưng có tính *kết hợp* và *phân phối*:
$$(AB)C = A(BC)$$
$$(A+B)C = AC + BC, A(B+C) = AB + AC$$
6. $A + 0 = 0 + A = A$
7. Ma trận đơn vị giao hoán với tất cả các ma trận vuông cùng chiều:
$$AI = IA = A$$

Chuyển vị:

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A+B)^T = A^T + B^T$
3. $(cA)^T = cA^T$
4. $(AB)^T = B^TA^T$

4 Biến đổi dòng, Phép khử Gauss-Jordan và Hệ phương trình tuyến tính

4.1 3 Phép biến đổi dòng trên một ma trận $m \times n$

Chúng ta có thể làm như vậy với cột, nhưng để phép tính được chính xác, chỉ nên thực hiện biến đổi dòng hoặc biến đổi cột trong suốt quá trình

- Loại 1: Tráo đổi dòng i và j (giả sử $i \geq j$): $\text{row}_i(A) \leftrightarrow \text{row}_j(A)$

$$A = \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \vdots \\ \text{row}_i(A) \\ \vdots \\ \text{row}_j(A) \\ \vdots \\ \text{row}_m(A) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \text{row}_1(A) \\ \vdots \\ \text{row}_j(A) \\ \vdots \\ \text{row}_i(A) \\ \vdots \\ \text{row}_m(A) \end{bmatrix}$$

- Loại 2: Nhân dòng i với một hệ số $c \neq 0$: $\mathrm{row}_i(A) \to c \cdot \mathrm{row}_i(A)$

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_i(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_m(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A) \\ \vdots \\ c \cdot \mathrm{row}_i(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_m(A) \end{bmatrix}$$

- Loại 3: Lấy dòng j cộng với c lần (c không nhất thiết khác 0) dòng i và thế kết quả vào dòng j: $\mathrm{row}_j(A) \to \mathrm{row}_j(A) + c \cdot \mathrm{row}_i(A)$

$$A = \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_i(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_j(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_m(A) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_i(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_j(A) + c \cdot \mathrm{row}_i(A) \\ \vdots \\ \mathrm{row}_m(A) \end{bmatrix}$$

4.2 Ma trận bậc thang

Một ma trận $E \in \mathbb{F}^{m \times n}$ được gọi là ma trận bậc thang nếu và chỉ nếu

1. Các dòng chứa toàn bộ số 0 nằm dưới cùng
2. Hệ số khác không đầu tiên của mỗi dòng phải nằm trước (về vị trí cột) "hệ số $\neq 0$ đầu tiên"của dòng tiếp theo, **nhưng không nằm trên cùng một cột**

*VD1: A là ma trận bậc thang, nhưng B không phải (dòng 2 và 4 không nằm dưới cùng, dòng 5 không nằm trên cùng, dòng 1 và 3 có hệ số khác không đầu tiên nằm trên cùng 1 cột)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -19 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -54 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -90 & 71 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

Tuy nhiên B có thể biến thành một ma trận bậc thang bằng cách đẩy các dòng 0 xuống cùng, đẩy dòng 5 lên cùng, và cuối cùng lấy dòng 3 trừ cho dòng 2 (hoặc [dòng 3] + (-1) [dòng 2])

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -90 & 71 & 6 & -5 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 44 & -90 & 71 & 6 & -5 \end{bmatrix}$$

$$\to \begin{bmatrix} 44 & -90 & 71 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 2 & 11 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 44 & -90 & 71 & 6 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*VD2: tất cả các ma trận tam giác trên

Nếu E đã là ma trận bậc thang nhưng thỏa mãn thêm điều kiện:

3. "Hệ số $\neq 0$ đầu tiên"của mỗi dòng luôn là 1

4. Với mỗi cột mà chứa "hệ số $\neq 0$ đầu tiên"của (duy nhất) 1 dòng, tất cả các hệ số trên cột đó ngoại trừ 1 phải bằng 0
   Lưu ý: Có những cột có chứa các hệ số $\neq 0$ nhưng có thể không chứa "hệ số $\neq 0$ đầu tiên", và có thể có những cột chứa toàn số 0.

thì E được gọi là ma trận bậc thang ***rút gọn***.
Ma trận bậc thang rút gọn của một ma trận A được ký hiệu là $\mathrm{rref}(A)$
*VD3: A trong VD1 không phải là ma trận bậc thang rút gọn bởi vì: các hệ số khác không đầu tiên lần lượt là 1, 6, -1 nhưng 6 và -1 $\neq 1$, và cột tương ứng với chúng là $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 24 \\ 33 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ (chỉ có 1 cột là thỏa mãn điều kiện 4)

Vẫn dùng biến đổi dòng, chúng ta có thể biến A thành dạng bậc thang rút gọn

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -19 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 6 & 6 & -54 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3:=-r_3]{r_2:=\frac{1}{6}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -19 & 7 & 24 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[r_2:=r_2+5r_3]{r_1:=r_1-24r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & -19 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1:=r_1-5r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -24 & 52 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

*VD4: ma trận đơn vị (ma trận chéo không thỏa điều kiện 3)

Ghi chú: Có một công cụ (cho dù chỉ hiệu quả với số nguyên) dùng để tìm dạng bậc thang rút gọn của một ma trận `http://www.math.odu.edu/~bogacki/cgi-bin/lat.cgi?c=rref` hoặc tìm trên Google: "reduced row echelon form linear algebra toolkit"

4.3 Phép khử Gauss-Jordan

Chúng ta bắt đầu với định lý:

Mọi ma trận A đều có thể chuyển về dạng bậc thang rút gọn

Chứng minh
Giả sử số hàng của A là m và số cột của A là n.
Sử dụng phép khử / thuật toán Gauss-Jordan được định nghĩa như sau:

*Biến đổi tới (cho dạng bậc thang): $\rightarrow, \downarrow$
Bắt đầu với $i = 1, j = 1$

1. ($\rightarrow$) Nếu tồn tại hệ số khác không ở cột j bắt đầu từ dòng i (giả sử đó là dòng $l \geq i$) tráo đổi $\text{row}_i(A)$ với $\text{row}_l(A)$ (loại 1). Nếu không, $j := j + 1$ và lặp lại bước 1
2. ($\downarrow$) Với ma trận A mới thực hiện biến đổi dòng loại 3 cho các dòng $> i$ như sau:
$$\text{row}_k(A) := \text{row}_k(A) - \frac{A_{kj}}{A_{ij}}\,\text{row}_i(A)$$
(khử các hệ số ở cột j nhưng dưới i, thường ở bên trái)
3. ($\rightarrow, \downarrow$) Sau bước 2, tất cả các hệ số trên cột j và dưới dòng i sẽ $= 0$. Tăng cả $i := i + 1$ và $j := j + 1$
4. Nếu hoặc $j > n$ hoặc $i > m$, dừng. Còn không thì quay trở lại bước 1.

*Biến đổi lùi (cho dạng bậc thang rút gọn): $\leftarrow, \uparrow$
Bắt đầu với $i = m, j = n$

5. ($\leftarrow$) Tìm cột c mà có hệ số khác không đầu tiên trên dòng i. Gán $j := c$
6. Thực hiện biến đối dòng loại 2 trên i:
$$\text{row}_i(A) := \frac{1}{A_{ij}}\,\text{row}_i(A)$$
7. ($\uparrow$) Với mỗi dòng $k < i$, thực hiện biến đổi dòng loại 3:
$$\text{row}_k(A) := \text{row}_k(A) - \frac{A_{kj}}{A_{ij}}\,\text{row}_i(A)$$
8. ($\uparrow$) $i := i - 1$ và trở lại bước 5 (nếu i vẫn còn > 0)

*VD:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3:=r_3+r_1]{r_2:=r_2-r_1} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3:=r_3+\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3:=\frac{1}{2}r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1:=r_1-r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2:=-\frac{1}{2}r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_1:=r_1-r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

4.4 Hệ phương trình tuyến tính

1 hệ m phương trình tuyến tính n ẩn có dạng

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \text{ hoặc } Ax = b$$

Khi dùng biến đổi dòng, ta cũng biến đổi phương trình tương ứng (loại 1 $\leftrightarrow$ tráo đổi 2 phương trình, loại 2 $\leftrightarrow$ nhân một hằng số khác 0 cho một phương trình, loại 3 $\leftrightarrow$ cộng một phương trình với c lần phương trình khác), và các phép biến đổi này là tương đương, nghĩa là có thể biến đổi nghịch đảo lại:

1. Loại 1: tráo đổi một lần nữa để đưa lại hệ phương trình trước đó.

2. Loại 2: nếu phương trình thứ i được nhân một lượng $c \neq 0$, ta có thể nhân lại $\frac{1}{c}$

3. Loại 3: nếu phương trình j mới = phương trình j cũ $+c$ phương trình i thì phương trình j cũ = phương trình j mới $-c$ phương trình i

Nói 1 cách khác, ta chỉ cần tìm dạng bậc thang rút gọn của rref($[A|b]$) (dấu gạch | để phân biệt) thì ta có thể giải được hệ phương trình dễ dàng bởi vì các biến x_k với k là các cột chứa 1 số 1 và còn lại số 0, có thể biểu diễn thành các biến ***tự do*** còn lại.

*VD1: Lấy VD từ phần 4.3

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Vì $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{4} & 1 \end{array}\right]$ nên

$$\begin{cases} x - \frac{1}{4}t & = 0 \\ y + \frac{1}{2}t & = 0 \\ z + \frac{3}{4}t & = 1 \end{cases} \Leftrightarrow (x, y, z, t) = \left(\frac{1}{4}t, -\frac{1}{2}t, 1 - \frac{3}{4}t\right)$$

A Nghịch đảo của một ma trận

Một ma trận vuông $A \in \mathbb{F}^{n\times n}$ được gọi là khả nghịch được nếu tồn tại ma trận vuông $B \in \mathbb{F}^{n\times n}$ sao cho

$$AB = BA = I$$

Nếu C là một ma trận sao cho $AC = CA = I$ thì

$$C = CI = C(AB) = (CA)B = IB = B$$

Như vậy, nghịch đảo của một ma trận là duy nhất và ta có thể ký hiệu A^{-1}

A.1 Tính chất

1. $(A^{-1})^{-1} = A$
2. $(cA)^{-1} = \frac{1}{c}A^{-1}$ $(c \neq 0)$
3. $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
4. $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$
5. A khả nghịch $\Rightarrow \mathrm{rref}(A) = I$

A.2 Một số tính chất khác

Phép nhân dòng và cột: $A \in \mathbb{F}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{F}^{n\times p}$

1.

$$\begin{aligned} AB &= A\left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{col}_1(B) & \mathrm{col}_2(B) & \cdots & \mathrm{col}_p(B) \end{array}\right] \\ &= \left[\begin{array}{c|c|c|c} A\,\mathrm{col}_1(B) & A\,\mathrm{col}_2(B) & \cdots & A\,\mathrm{col}_p(B) \end{array}\right] \end{aligned}$$

2.

$$AB = \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A) \\ \hline \mathrm{row}_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{row}_m(A) \end{bmatrix} B$$
$$= \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A)B \\ \hline \mathrm{row}_2(A)B \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{row}_m(A)B \end{bmatrix}$$

3.

$$AB = \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A) \\ \hline \mathrm{row}_2(A) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{row}_m(A) \end{bmatrix} \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{col}_1(B) & \mathrm{col}_2(B) & \cdots & \mathrm{col}_p(B) \end{array}\right]$$
$$= \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(A)\,\mathrm{col}_1(B) & \mathrm{row}_1(A)\,\mathrm{col}_2(B) & \cdots & \mathrm{row}_1(A)\,\mathrm{col}_p(B) \\ \mathrm{row}_2(A)\,\mathrm{col}_1(B) & \mathrm{row}_2(A)\,\mathrm{col}_2(B) & \cdots & \mathrm{row}_2(A)\,\mathrm{col}_p(B) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{row}_m(A)\,\mathrm{col}_1(B) & \mathrm{row}_m(A)\,\mathrm{col}_2(B) & \cdots & \mathrm{row}_m(A)\,\mathrm{col}_p(B) \end{bmatrix}$$

4.

$$AB = \left[\begin{array}{c|c|c|c} \mathrm{col}_1(A) & \mathrm{col}_2(A) & \cdots & \mathrm{col}_n(A) \end{array}\right] \begin{bmatrix} \mathrm{row}_1(B) \\ \hline \mathrm{row}_2(B) \\ \hline \vdots \\ \hline \mathrm{row}_n(B) \end{bmatrix}$$
$$= \mathrm{col}_1(A)\,\mathrm{row}_1(B) + \mathrm{col}_2(A)\,\mathrm{row}_2(B) + \cdots + \mathrm{col}_n(A)\,\mathrm{row}_n(B)$$

Gọi $e_k = \mathrm{col}_k(I)$ $(1 \leq k \leq n)$ và $A \in \mathbb{F}^{n \times n}$:

1. $Ae_j = \mathrm{col}_j(A)$
2. $e_i^T A = \mathrm{row}_i(A)$
3. $e_i^T A e_j = A_{ij}$

A.3 Tính toán ma trận nghịch đảo của một ma trận

Vì $AB = I$ nên

$$A\,\mathrm{col}_k(B) = \mathrm{col}_k(I)$$

$\Rightarrow \mathrm{rref}[A|\,\mathrm{col}_k(I)] = [I|A^{-1}\,\mathrm{col}_k(I)] = [I|\,\mathrm{col}_k(A^{-1})]$ Ghép các cột của I lại ta có $\mathrm{rref}[A|I] = [I|A^{-1}]$

Như vậy muốn tìm ma trận nghịch đảo của A ta chỉ cần áp dung phép khử Gauss-Jordan cho $[A|I]$ (một ma trận $n \times 2n$) và lấy n cột cuối.

B Biến đổi tuyến tính

B.1 Tổ hợp tuyến tính và Phụ thuộc tuyến tính

Cho một tập hợp $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ hữu hạn các vector trong $\mathbb{F}^n$. Khi đó ta nói một ***tổ hợp tuyến tính*** của S là tổng

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n$$
$$\text{với } c_i \in \mathbb{F}$$

Ví dụ như tổ hợp tuyến tính của $(0,1)$ và $(1,0)$ là (c_1, c_2) hoặc thay thế $c_1 = x$, $c_2 = y$ thì ta có (x, y)
Tập tất cả các tổ hợp tuyến tính của S được gọi là không gian sinh ra từ S (ký hiệu span(S))
*VD1: Với không gian n chiều $\mathbb{R}^n$ thì $\mathbb{R}^n$ chính là không gian sinh ra từ tập $\{\text{col}_k(I_n)|1 \leq k \leq n\} = \{(1,0,0,\dots,0),(0,1,0,\dots,0),\dots,(0,0,0,\dots,0,1)\}$

Vẫn tập S hữu hạn như trên, ta nói các vector trong S bị ***phụ thuộc tuyến tính*** khi và chỉ khi tồn tại các số $c_i \in \mathbb{F}$ ($i \in \{1, 2, \dots, n\}$) không đồng thời bằng 0 ($\exists l : c_l \neq 0$) sao cho

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = 0 \tag{1}$$

*VD2: $(1,4,5), (2,7,9), (2,10,12)$ bị phụ thuộc tuyến tính bởi vì

$$3(1,4,5) - (2,7,9) - \frac{1}{2}(2,10,12) = (0,0,0) = 0$$

Một tập các vector mà không bị phụ thuộc tuyến tính ((1) chỉ có nghiệm duy nhất $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$) thì được gọi là ***độc lập tuyến tính***.
*VD3: lấy VD1, $n = 3$ chẳng hạn. Khi đó

$$a(1,0,0) + b(1,0,0) + c(0,0,1) = (a,b,c) = (0,0,0) \Leftrightarrow a = b = c = 0$$

Định lý: Giả sử S độc lập tuyến tính

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \cdots + c_nv_n = d_1v_1 + d_2v_2 + \cdots + d_nv_n \Leftrightarrow c_i = d_i, \forall 1 \leq i \leq n$$

Mỗi vector trong không gian sinh ra từ S (S độc lập tuyến tính) đều có tổ hợp tuyến tính duy nhất của S. Khi đó, với mỗi x thuộc span(S) ta có thể viết

$$[x]_S = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

$$\text{với } x = x_1v_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n$$

và gọi nó là biểu diễn vector của x so với S

B.2 Hệ cơ sở của một không gian n chiều

Nếu tồn tại một tập $S \subset \mathbb{F}^n$ sao cho S độc lập tuyến tính và $\mathbb{F}^n$ sinh ra từ S thì ta gọi S là một ***hệ cơ sở*** của $\mathbb{F}^n$
*VD: Với $\mathbb{R}^3$ ngoài $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$ là một hệ cơ sở ta còn có vô số hệ khác như $\{(1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)\}$ hoặc $\{(2,0,0),(3,0,1),(0,4,5)\}$

Định lý: Bất kỳ hệ cơ sở nào của $\mathbb{F}^n$ cũng đều có n phần tử.
Ta định nghĩa hệ cơ sở ***tiêu chuẩn*** của $\mathbb{F}^n$ là tập

$$\sigma_n = \{(1,0,0,\ldots,0),(0,1,0,\ldots,0),\ldots,(0,0,0,\ldots,0,1)\}$$

B.3 Ma trận và Phép biến đổi tuyến tính

Một hàm $f : \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ được gọi là biến đổi tuyến tính nếu

$$f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{F}^n$$

$$f(c \cdot x) = c \cdot f(x), \forall x \in \mathbb{F}^n, c \in \mathbb{F}$$

*VD1: Phép đồng dạng với tỷ số k từ gốc O trong $\mathbb{R}^2$. Hàm tương ứng là $f(a,b) = k(a,b) = (ka, kb)$ (viết gọn là $f(v) = k \cdot v$ với $v \in \mathbb{R}^2$) là một phép biến đổi tuyến tính

Tính chất: $f(0) = 0$
Định lý: nếu β và γ là hệ cơ sở tương ứng với $\mathbb{F}^n$, $\mathbb{F}^m$ thì tồn tại ma trận A (phụ thuộc vào β và γ) sao cho

$$f(x) = y \Leftrightarrow A[x]_\beta = [y]_\gamma$$

Như vậy, phép biến đổi tuyến tính của x chỉ đơn thuần là tích ma trận với biểu diễn vector của x so với β (hay mỗi một ma trận $\in \mathbb{F}^{m \times n}$ là một phép biển đổi tuyến tính từ $\mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$)

B.4 Một số phép biển đổi tuyến tính thường gặp

(Hệ cơ sở tiêu chuẩn)
Lưu ý: Phép tịnh tiến không phải là phép biến đổi tuyến tính (cho dù nó bảo toàn khoảng cách và góc)

B.4.1 Phép đối xứng

* 2 chiều:

\+ Qua trục y: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \end{bmatrix}$$

\+ Qua trục x: $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

* 3 chiều:

\+ Qua mặt phẳng xy: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ -z \end{bmatrix}$$

\+ Qua mặt phẳng yz: $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

\+ Qua mặt phẳng zx: $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \\ z \end{bmatrix}$$

B.4.2 Phép quay quanh gốc O trong 2 chiều

Quay một góc định hướng θ (ngược chiều kim đồng hồ nếu dương, cùng chiều nếu âm), quanh tâm O, bắt đầu từ trục x: $R_\theta = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \\ \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) \end{bmatrix}$$

B.4.3 Phép vị tự tâm O

Phép vị tự tâm O tỷ số k: kI_n

B.4.4 Tổng quát: Phép biến đổi tuyến tính và bảo toàn khoảng cách & góc

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, một phép biến đổi tuyến tính $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mà bảo toàn được khoảng cách giữa 2 điểm bất kỳ và góc giữa 2 đường thẳng bất kỳ thì sẽ có ma trận biểu diễn Q thỏa mãn

$$Q^T Q = QQ^T = I_n \tag{2}$$

Ma trận Q thỏa mãn (2) được gọi là ma trận ***trực giao*** và bất kỳ ma trận trực giao nào cũng sẽ tương ứng với một phép biến đổi tuyến tính mà bảo toàn khoảng cách và góc.

C Nguồn tham khảo

Lecture Notes for Linear Algebra, James S. Cook
Wikipedia