Giải tích một và nhiều biến

Vũ Đức Tài

A. Giải tích một biến:

I. Một số khái niệm quan trọng:

1. Điểm tụ của một tập hợp:

<u>*Định nghĩa:*</u> Điểm $x_0 \in \mathbb{R}$ được gọi là điểm tụ (hay điểm giới hạn) của tập hợp $U \subset \mathbb{R}$ nếu mọi lân cận V của x_0 đều chứa ít nhất một điểm của U khác x_0, tức là $V \cap \left(U \setminus \{x_0\}\right) \neq \varnothing$ với mọi lân cận V của x_0.

2. Vô cùng bé và vô cùng lớn:

2.1. Định nghĩa:

Cho tập hợp $U \subset \mathbb{R}$ có điểm tụ x_0 và hàm số $f : U \to \mathbb{R}$.

Ta nói f là một vô cùng bé (VCB) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = 0$.

Ta nói f là một vô cùng lớn (VCL) khi $x \to x_0$ nếu $\lim\limits_{x \to x_0} \left|f(x)\right| = +\infty$.

2.2. Tính chất:

(i) Nếu f, g là những VCB tại x_0 thì $f \pm g, fg$ cũng là những VCB tại x_0.

(ii) Nếu f, g là những VCL tại x_0 thì fg cũng là VCL tại x_0.

(iii) Nếu f là một VCB tại x_0, g là một hàm số bị chặn trong một lân cận V nào đó của x_0 thì fg cũng là VCB tại x_0.

(iv) Nếu f là VCL tại x_0 thì $\dfrac{1}{f}$ là VCB tại x_0.

2.3. So sánh các vô cùng bé:

<u>*Định nghĩa:*</u> Cho f, g là hai VCB tại x_0. Giả sử $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = l$.

(i) Nếu $l = 0$ thì ta nói f là VCB bậc cao hơn VCB g (hoặc g là VCB bặc thấp hơn VCB f) và ký hiệu là $f = o(g)$

(ii) Nếu $0 < |l| < +\infty$ thì ta nói f, g là hai VCB cùng bậc. Đặc biệt khi $l = 1$ ta nói f, g là hai VCB tương đương và ký hiệu $f \sim g$.

(iii) Nếu $l = +\infty$ thì f là VCB bậc thấp hơn VCB g.

Chú ý: Nếu không tồn tại $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ thì ta nói f,g là hai VCB không so sánh được.

Từ định nghĩa ta thấy nếu f,g,h là những VCB khi $x\to x_0$ và $f\sim g, g\sim h$ thì $f\sim h$.

2.4. Ứng dụng VCB tương đương để khử dạng vô định:

Mệnh đề: Giả sử $f,g,\overline{f},\overline{g}$ là những VCB tại x_0 và $f\sim\overline{f}, g\sim\overline{g}$. Khi đó:

$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\overline{f}(x)}{\overline{g}(x)}$ nếu một trong hai giới hạn này tồn tại.

Chú ý: Nếu $\alpha(x),\beta(x)$ là hai VCB khi $x\to x_0$ và $\beta(x)=o\left(\alpha(x)\right)$ thì $\alpha(x)+\beta(x)\sim\alpha(x)$.

Như vậy, trong quá trình khử dạng vô định $\dfrac{0}{0}$ nếu tử số hoặc mẫu số là tổng của các VCB thì ta có thể thay bằng các VCB tương đương bằng cách bỏ đi các VCB bậc cao.

Kỹ thuật này có thể kết hợp với khai triển Taylor để tìm giới hạn (sẽ được trình bày ở phần sau).

II. Phép tính vi phân hàm một biến:

1. Đạo hàm cấp một:

1.1. Khái niệm:

Định nghĩa: Giả sử $f:(a,b)\to\mathbb{R}$. Ta nói rằng f có đạo hàm tại điểm $x_0\in(a,b)$ nếu tồn tại giới hạn (có thể vô hạn): $f'(x_0)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$

$f'(x_0)$ được gọi là đạo hàm của hàm số f tại điểm x_0

Trong trường hợp $f'(x_0)$ hữu hạn ta nói f khả vi tại x_0. Nếu f khả vi tại mỗi điểm $x\in E\subset(a,b)$ thì ta nói f khả vi trên E.

Chú ý:

a. Ta có thể định nghĩa đạo hàm một phía như sau:

$$f'_+(x_0)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\quad\text{(đạo hàm phía phải)}$$

$$f'_-(x_0)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}\quad\text{(đạo hàm phía trái)}$$

f có đạo hàm tại x_0 nếu và chỉ nếu f có đạo hàm hai phía và bằng nhau $f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$

b. Ta nói rằng f khả vi trên đoạn $[a,b]$ nếu nó khả vi trên (a,b), có đạo hàm phía phải hữu hạn tại a và có đạo hàm phía trái hữu hạn tại b.

1.2. Định lý: Nếu f khả vi tại $x_0\in(a,b)$ thì f liên tục tại x_0.

1.3. Các quy tắc tính đạo hàm:

(i) Đạo hàm có tính chất tuyến tính, tức là $(af+bg)'(x)=af'(x)+bg'(x)$ với $a,b\in\mathbb{R}$

(ii) Công thức đạo hàm của tích: $(fg)'(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$

(iii) Công thức tính đạo hàm của thương: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$

(iv) Công thức đạo hàm của hàm số hợp: Nếu f liên tục trên $[a,b]$, khả vi tại $x\in(a,b)$, g xác định trên khoảng I chứa miền giá trị của f và g khả vi tại $f(x)$ thì hàm số hợp $h=g\circ f$ khả vi tại x và $h'(x)=\left[g\left(f(x)\right)\right]'=g'\left(f(x)\right).f'(x)$

(v) Công thức đạo hàm của hàm số ngược: Nếu $y=f(x)$ khả vi trong lân cận (a,b) của x_0 sao cho f' liên tục trong (a,b) và $f'(x_0)\neq 0$ thì tồn tại hàm số ngược $x=f^{-1}(y)$ trong lân cận nào đó của y_0, f^{-1} khả vi tại $y_0=f(x_0)$ và $x'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}$

2. Đạo hàm cấp cao:

Ta xác định $f,f',f'',f^{(3)},...,f^{(n)}$ trong đó $f^{(i+1)}$ là đạo hàm của $f^{(i)}$ $(i=\overline{0,n-1})$ với quy ước $f^{(0)}=f$. Khi đó $f^{(n)}$ được gọi là đạo hàm cấp n của f.

3. Các định lý cơ bản của đạo hàm (trên đoạn đóng hữu hạn):

3.1. Định lý Fermat:

<u>Nhắc lại về cực trị địa phương:</u>

Hàm f đạt cực đại (tiểu) địa phương tại x_0 nếu tồn tại một lân cận I của x_0 sao cho:

$$f(x)\le f(x_0)\quad (\ f(x)\ge f(x_0)\ )\quad \forall x\in \mathrm{I}$$

Hàm f đạt cực trị địa phương tại x_0 nếu tại đó f đạt cực đại hoặc cực tiểu địa phương.

<u>Định lý Fermat:</u> Giả sử f xác định trên $[a,b]$ và có cực trị địa phương tại $x_0\in(a,b)$. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại x_0 thì $f'(x_0)=0$

3.2. Định lý giá trị trung gian:

Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, f liên tục trên $[a,b]$. Khi đó, với mọi c nằm giữa $f(a),f(b)$ tồn tại $x_0\in[a,b]$ sao cho $f(x_0)=c$.

3.3. Định lý Cauchy:

Giả sử $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$, liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b). Khi đó, tồn tại $x_0\in(a,b)$ sao cho: $\left[f(b)-f(a)\right].g'(x_0)=\left[g(b)-g(a)\right].f'(x_0)$

3.4. Định lý Rolle:

Cho $f:[a,b]\to\mathbb{R}$; $f(a)=f(b)$, f liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b) thì tồn tại $x_0\in(a,b)$ sao cho $f'(x_0)=0$

3.5. Định lý về gia số của Lagrange (hay định lý giá trị trung bình):

Giả sử $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, liên tục trên $[a,b]$, khả vi trong (a,b). Khi đó, tồn tại $x_0\in(a,b)$ sao cho:

$$f(b)-f(a)=(b-a)f'(x_0)$$

<u>Hệ quả:</u> Giả sử f khả vi trong (a,b)

$f'(x)\ge 0\ \ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow f$ không giảm

$f'(x)>0\ \ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow f$ tăng

$f'(x)\equiv 0\ \ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow f$ là hằng số

$f'(x)\le 0\ \ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow f$ không tăng

$f'(x)<0\ \ \forall x\in(a,b)\ \Rightarrow f$ giảm

3.6. Định lý giá trị trung gian của đạo hàm:

Giả sử f khả vi trên $[a,b]$ và $f'(a)<\lambda<f'(b)$. Khi đó, tồn tại $x_0\in(a,b)$ sao cho $f'(x_0)=\lambda$

<u>Hệ quả:</u> Nếu f khả vi trên $[a,b]$ thì f' không có gián đoạn loại một.

4. Quy tắc L'Hospital:

4.1. Định lý:

<u>Định lý:</u> Giả sử f,g là hàm thực khả vi trong (a,b) và $g'(x)\ne 0$ với mọi $x\in(a,b)$, trong đó $-\infty\le a<b\le+\infty$. Giả sử có: $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=l$ (hữu hạn hoặc vô hạn)

Nếu $\lim\limits_{x\to a^+}f(x)=\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=0$ hoặc $\lim\limits_{x\to a^+}g(x)=+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}=l$

Kết quả tương tự cũng đúng nếu $x\to b^-$.

<u>Chú ý:</u>

a. Khi gặp giới hạn hai phía $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, $x_0\in(a,b)$ thì ta vẫn có thể áp dụng quy tắc L'Hospital nếu các giả thiết trong quy tắc thỏa mãn khi x tiến đến x_0 theo cả hai phía trái và phải.

b. Có trường hợp tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, nhưng không tồn tại $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$.

c. Quy tắc L'Hospital có thể áp dụng nhiều lần.

4.2. Ứng dụng Quy tắc L. Hospital trong tìm giới hạn:

Ví dụ 1: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{2^x-1}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3^x\ln 3}{2^x\ln 2}=\dfrac{\ln 3}{\ln 2}=\log_2 3$

Ví dụ 2: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\ln^2 x}{x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2\ln x}{3x^3}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2}{9x^3}=0$

5. Công thức Leibniz:

Cho tập mở $U\subset R$, $f,g:U\to\mathbb{R}$ là 2 hàm khả vi cấp n trên U. Khi đó:

$$(fg)^{(n)}(x)=\sum_{k=0}^{n}C_n^k f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x)$$

6. Công thức Taylor:

6.1. Đa thức Taylor:

Giả sử $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ có đạo hàm liên tục đến cấp $n-1$ trên $[a,b]$ và có đạo hàm hữu hạn cấp n tại $x_0\in[a,b]$. Ta gọi đa thức Taylor cấp n của f tại x_0 là đa thức sau:

$$P_n(x_0,f)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$$

6.2. Khai triển Taylor với phần dư Peano:

Giả sử $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f^{(n-1)}(x)$ liên tục trên $[a,b]$, tồn tại $f^{(n)}(x_0)$ hữu hạn với $x_0\in[a,b]$. Khi đó: $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o(x-x_0)^n$

Với $x_0=0$ ta có khai triển Maclaurin: $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{f^{(k)}(0)}{k!}(x)^k+o(x^n)$

6.3. Khai triển Taylor với phần dư Lagrange:

Giả sử $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ khả vi liên tục tới cấp n trên $[a,b]$, tồn tại $f^{(n+1)}$ hữu hạn trong (a,b).

Khi đó, ta có khai triển Taylor sau: $f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r(x)$

trong đó $r(x)=(x-x_0)^{n+1}\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$ đối với $x,x_0\in[a,b]$ và c là số nào đó nằm giữa x và x_0.

6.4. Một số khai triển Taylor thông dụng:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+...+\frac{x^n}{n!}+e^{\theta x}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

$$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-...+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+(-1)^{n+1}\sin(\theta x)\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+(-1)^n\cos(\theta x)\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-...+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+(-1)^n\frac{x^{n+1}}{(n+1)(1+\theta x)^{n+1}}$$

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+...+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{(n+1)!}x^{n+1}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$$

Trong đó $\theta x=c$ là số nằm giữa x và 0, tức là $0<\theta<1$.

6.5. Ứng dụng khai triển Taylor trong tính gần đúng:

Ví dụ 1: Dùng công thức $\sin x\approx x-\frac{x^3}{6}$ thì sai số $|r|<\frac{|x|^5}{120}$. Nếu muốn sai số này nhỏ, chẳng hạn $|r|<10^{-3}$ thì cần lấy $\frac{|x|^5}{120}<10^{-3}$, tức là $|x|<0.6544\approx 37.5^\circ$.

Ví dụ 2: Nếu muốn tính số e với sai số $<10^{-3}$ ta làm như sau:

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+...+\frac{1}{n!}+\frac{e^\theta}{(n+1)!}$$

$$|r|=\frac{e^\theta}{(n+1)!}<\frac{3}{(n+1)!}<10^{-3}$$

Cần chọn $n=6$.

6.6. Ứng dụng khai triển Taylor trong tìm giới hạn:

Ví dụ: Tìm giới hạn $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\sqrt{1-x^2+x^3}}{\ln\left(1+x^2\right)}$

Lời giải: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-\sqrt{1-x^2+x^3}}{\ln\left(1+x^2\right)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\left(1+x^2+\dfrac{x^4}{2}+o\left(x^4\right)\right)-\left(1+\dfrac{x^3-x^2}{2}+o\left(x^3\right)\right)}{x^2+o\left(x^2\right)}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+x^2+\dfrac{x^4}{2}-1+\dfrac{x^2-x^3}{2}}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{3}{2}x^2-\dfrac{x^3}{2}+\dfrac{x^4}{2}}{x^2}=\frac{3}{2}$$

7. Vi phân:

7.1. Vi phân bậc nhất:

Bài toán: Giả sử $y=f:\left(a,b\right)\to\mathbb{R}$ liên tục tại $x_0\in\left(a,b\right)$. Ta muốn xấp xỉ $\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)$ bằng một đơn thức của Δx, cụ thể là tìm biểu diễn f dưới dạng

$$\Delta y=A\Delta x+o\left(\Delta x\right),\quad x\in\left(a,b\right),\ \Delta x=x-x_0 \qquad (7.1)$$

trong đó A là các hằng số phải tìm.

Từ khai triển Taylor cấp một suy ra điều kiện cần và đủ để f có tính chất trên là f có đạo hàm hữu hạn tại x_0 và khi đó $A=f'\left(x_0\right)$.

Như vậy, phần chính của vô cùng bé $\Delta y=f\left(x\right)-f\left(x_0\right)$ là $A\left(x-x_0\right)=f'\left(x_0\right)\left(x-x_0\right)$. Từ đó:

$$\Delta y=f\left(x_0+\Delta x\right)-f\left(x_0\right)=A\Delta x+o\left(\Delta x\right)=f'\left(x_0\right)\Delta x+o\left(\Delta x\right)$$

Định nghĩa: Ta nói rằng f khả vi tại x_0 nếu đẳng thức (7.1) được thực hiện. Trong trường hợp đó, ta ký hiệu $dy=df\left(x_0\right)=A\Delta x$ và gọi đó là vi phân của hàm f tại $x=x_0$.

Hiển nhiên $dx=\Delta x=x-x_0$.

Từ định nghĩa suy ra $df\left(x_0\right)=f'\left(x_0\right)\Delta x=f'\left(x_0\right)dx$; $f'\left(x_0\right)=\dfrac{df\left(x_0\right)}{dx}$

Ta thường viết tắt là $df=f'dx$, $f'=\dfrac{df}{dx}$.

Từ các quy tắc tính đạo hàm ta có:

$$d\left(f+g\right)=df+dg$$

$$d\left(a.f\right)=a.df$$

$$d\left(fg\right)=f.dg+g.df$$

$$d\left(\frac{f}{g}\right)=\frac{g.df-f.dg}{g^2} \quad (\text{nếu } g\neq 0)$$

Nếu $H=g\left(f\left(x\right)\right), y=f\left(x\right)$ thì $dH=g'\left(y\right)f'dx$.

7.2. Ứng dụng vi phân vào phép tính gần đúng:

Ta có khi $\Delta x\to 0$ thì $f\left(x_0+\Delta x\right)\approx f\left(x_0\right)+f'\left(x_0\right)\Delta x$.

Ví dụ 1: Tính gần đúng $\sin 31^\circ$

Ta có $\sin\left(x+\Delta x\right)\approx \sin x+\Delta x\cos x$ nên

$$\sin 31^\circ=\sin 30^\circ+\frac{\pi}{180}\cos 30^\circ\approx 0.5+\frac{\sqrt{3}}{2}.0.01745\approx 0.5151$$

Ví dụ 2: Xét hàm $f\left(x\right)=\sqrt[n]{x}$. Với $\left|\Delta x\right|$ đủ nhỏ ta có: $\sqrt[n]{x+\Delta x}\approx \sqrt[n]{x}+\frac{1}{n}.\frac{\sqrt[n]{x}}{x}\Delta x$.

Đặc biệt với $x=a^n\left(a>0\right)$ ta có $\sqrt[n]{a^n+\Delta x}\approx a+\frac{\Delta x}{na^{n-1}}$.

Chẳng hạn $\sqrt{408}\approx 20+\frac{8}{2.20}=20.2$

$$\sqrt{390}=\sqrt{20^2-10}\approx 20-\frac{10}{2.20}=19.75$$

7.3. Vi phân cấp cao:

Vi phân cấp n là vi phân của vi phân cấp $n-1$: $d^n f=d\left(d^{n-1}f\right)$

Chú ý rằng nếu x là biến số độc lập thì $d^n x=0$ với $n\geq 2$, nên $d^n f=f^{(n)}\left(x\right)\left(dx\right)^n$, tức

$$f^{(n)}\left(x\right)=\frac{d^n f}{\left(dx\right)^n}.$$

Chú ý:

Dạng vi phân bậc nhất bất biến khi đổi biến $x=\varphi\left(t\right)$. Thậy vậy:

$$df\left(t\right)=f'_x\left(\varphi\left(t\right)\right)\varphi'_t\left(t\right)dt=f'_x\left(x\right)dx=df\left(x\right)$$

Tính chất này không còn đúng với vi phân bậc hai.

B. Giải tích nhiều biến:

1. Phép biến đổi tuyến tính:

1.1. Vector:

Để thuận lợi khi sử dụng các phép tính ma trận, vector x trong $\mathbb{R}^n$ được viết dưới dạng cột:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Các vector đơn vị trong $\mathbb{R}^n$ được viết dưới dạng cột: $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, ..., e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$

Ta gọi các vector này là cơ sở tự nhiên (chính tắc) của $\mathbb{R}^n$.

Chuẩn của vector x trong $\mathbb{R}^n$: $\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$

Dễ thấy rằng $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

Tích vô hướng của 2 vector x, y trong $\mathbb{R}^n$: $< x, y >= \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$

Ta có: $x = \sum_{k=1}^{n} < x, e_k > e_k = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$

1.2. Định nghĩa:

Với mọi $x, y \in \mathbb{R}^n$, và với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ta nói rằng $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là tuyến tính nếu:

$$f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y)$$

1.3. Ma trận biểu diễn phép biến đổi tuyến tính:

Ký hiệu $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ là cơ sở tự nhiên trong $\mathbb{R}^n$, $\{e'_1, e'_2, ..., e'_m\}$ là cơ sở tự nhiên trong $\mathbb{R}^m$. Khi đó, $\{f(e_1), f(e_2), ..., f(e_n)\}$ là n vector trong $\mathbb{R}^m$, do đó: $f(e_j) = \sum_{i=1}^{m} < e'_i, f(e_j) > e'_i, \quad j = \overline{1, n}$

Như vậy, nếu đặt $a_{ij} =< e'_i, f(e_j) >, \quad i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m}$

Ta có $f\left(e_j\right)=\sum_{i=1}^{m} a_{ij}e_i', \quad j=\overline{1,n}$ hay $f\left(e_j\right)=\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$

Ma trận $A_f=\left(a_{ij}\right)$ được gọi là ma trận biểu diễn phép biến đổi tuyến tính f trong cơ sở tự nhiên.

Nếu $x\in\mathbb{R}^n$ có dạng $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$ thì $f\left(x\right)=\sum_{j=1}^{n}x_jf\left(e_j\right)=\sum_{j=1}^{n}x_j\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}e_i'\right)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)e_i'=A_fx$

Chú ý:

a. Nếu có 2 phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ và $g:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^l$ thì $F=g\circ f$ là phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^l$ và $A_F=A_gA_f$.

b. Phép biến đổi tuyến tính $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ có ánh xạ ngược f^{-1} khi và chỉ khi A_f có nghịch đảo, tức $\det A_f\neq 0$. Khi đó: $A_{f^{-1}}=A_f^{-1}$.

c. Giả sử f là phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^n$. Phương trình $y=f\left(x\right)$ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi A_f có nghịch đảo. Khi đó: $x=A_f^{-1}y$.

Dưới đây ta thường dùng A để ký hiệu phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$ và viết Ax thay cho $A\left(x\right)$.

1.4. Chuẩn của ánh xạ tuyến tính:

Giả sử A là biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}^m$. Chuẩn của A là số thực không âm được định nghĩa như sau: $\|A\|=\sup_{\|x\|\le 1}\|Ax\|$

Chú ý rằng nếu $x=\sum_{j=1}^{n}x_je_j$, $\|x\|\le 1$ thì $\|x\|^2=\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2\le 1$

Theo Bất đẳng thức Cauchy - Schwarz:

$$\|Ax\|^2=\left\|\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_je_i'\right\|^2=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right)\le\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)\left(\sum_{j=1}^{n}\left|x_j\right|^2\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\|x\|^2\le\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2$$

Hay $\|A\|\le\left(\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$

Dễ thấy $\|Ax\|\le\|A\|\|x\|$ và $\|A\|=\inf\left\{\lambda:\|Ax\|\le\lambda\|x\|,\forall x\in\mathbb{R}^n\right\}$.

2. Sự hội tụ trong $\mathbb{R}^n$:

2.1. Định nghĩa giới hạn dãy:

Dãy điểm $\{x_k\}$ trong $\mathbb{R}^n$ với $x_k = (x_{1,k},...,x_{n,k})$ được gọi là hội tụ đến điểm $a = (a_1,...,a_n) \in \mathbb{R}^n$ nếu $\lim\limits_{k\to+\infty} \|x_k - a\| = 0$. Khi đó, ta viết: $\lim\limits_{k\to+\infty} x_k = a$ hay $x_k \to a$ khi $k \to +\infty$.

<u>Chú ý:</u>

a. Dễ chứng minh: Giới hạn trên là duy nhất

b. Dễ chứng minh: Sự hội tụ của dãy điểm trong $\mathbb{R}^n$ là sự hội tụ theo tọa độ.

Tức là: Nếu $x_k \to a$ thì $x_{i,k} \to a_i$ khi $k \to +\infty$, $i = \overline{1,n}$.

c. Nếu $x_k \to x, y_k \to y$ thì $\alpha x_k + \beta y_k \to \alpha x + \beta y$ $(\alpha, \beta \in \mathbb{R})$

d. Nếu $x_k \to x$ thì $\|x_k\| \to \|x\|$ (tính liên tục của chuẩn)

2.2. Định lý: (Bolzano - Weierstras)

Trong $\mathbb{R}^n$ mọi dãy bị chặn đều chứa một dãy con hội tụ

2.3. Nguyên lý Cauchy:

<u>Định nghĩa:</u> Môt dãy điểm $\{x_k\}$ trong $\mathbb{R}^n$ được gọi là dãy cơ bản hay dãy Cauchy nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước, tồn tại k_0 sao cho với mọi $k, l \ge k_0$ ta có $\|x_k - x_l\| < \varepsilon$.

<u>Định lý:</u> (Cauchy) Dãy $\{x_k\} \subset \mathbb{R}^n$ hội tụ khi và chỉ khi nó là dãy cơ bản.

3. Một số khái niệm và kết quả khác:

3.1. Lân cận của một điểm:

Cho $a \subset \mathbb{R}^n, r > 0$.

Tập $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| < r\}$ được gọi là hình cầu mở tâm a bán kính r.

Tập $B[a,r] = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x - a\| \le r\}$ được gọi là hình cầu đóng tâm a bán kính r.

Trong $\mathbb{R}^n$, một tập hợp V được gọi là lân cận của điểm a nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho $B(a,r) \subset V$.

Rõ ràng giao của một số hữu hạn lân cận của điểm a cũng là lân cận của điểm a.

3.2. Tập mở và tập đóng:

Tập hợp $G \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập mở nếu với mỗi điểm $a \in G$ đều có một lân cận V của a sao cho $V \subset G$, điều này tương đương với điều kiện: với mỗi $a \in G$ tồn tại $r > 0$ sao cho $B(a,r) \subset G$.

Tập $F \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là tập đóng nếu $F^c = \mathbb{R}^n \setminus F$ là tập mở.

3.3. Điểm tụ của một tập hợp:

Cho tập $A \subset \mathbb{R}^n$. Điểm $x \in \mathbb{R}^n$ được gọi là điểm tụ hay điểm giới hạn của tập hợp A nếu mọi lân cận V của x đều chứa ít nhất một điểm của A khác x, tức là $V \cap \left(A \setminus \{x\}\right) \neq \varnothing$.

Tập hợp tất cả các điểm tụ của A được gọi là tập dẫn xuất của A, kí hiệu là A'.

4. Giới hạn của hàm vector:

4.1. Định nghĩa giới hạn hàm:

Cho hàm vector $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ và $a \in U'$. Ta nói rằng $b \in \mathbb{R}^m$ là giới hạn của hàm f tại a nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ (phụ thuộc ε) sao cho với mọi $x \in U$ thỏa mãn $0 < \|x - a\| < \delta$ ta có $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

Ta viết $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ hay $f(x) \to b$ khi $x \to a$.

4.2. Một số định lý:

<u>*Định lý 1:*</u> Giả sử $U \subset \mathbb{R}^n, a \subset U', f: U \to \mathbb{R}^m$. Khi đó:

a. $\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_k\} \subset U \setminus \{a\}, x_k \to a (k \to +\infty)$ ta có $\lim\limits_{k \to +\infty} f(x_k) = b$.

b. Nếu tồn tại giới hạn $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ thì giới hạn đó là duy nhất.

c. (Nguyên lý Cauchy) Hàm $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ có giới hạn tại a khi và chỉ khi với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$ với mọi $x, x' \in U$ thỏa mãn $0 < \|x - a\| < \delta, o < \|x' - a\| < \delta$.

<u>*Định lý 2:*</u> Cho $U \subset \mathbb{R}^n, a \in U'$ và $f, g: U \to \mathbb{R}^m$. Giả sử $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ và $\lim\limits_{x \to a} g(x)$ tồn tại. Khi đó:

a. $\lim\limits_{x \to a}\left(\alpha f(x) + \beta g(x)\right) = \alpha \lim\limits_{x \to a} f(x) + \beta \lim\limits_{x \to a} g(x)$ với mọi $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

b. Với $m = 1$ thì $\lim\limits_{x \to a}\left(f(x) g(x)\right) = \lim\limits_{x \to a} f(x) . \lim\limits_{x \to a} g(x)$

c. Nếu $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$ thì $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$.

<u>*Định lý 3*</u>: Cho hàm $f: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $f = (f_1, ..., f_m)$ và $b = (b_1, ..., b_m)$. Ta có

$$\lim_{x \to a} f(x) = b \Leftrightarrow \lim_{x \to a} f_i(x) = b_i \left(i = \overline{1, m}\right)$$

5. Hàm liên tục:

5.1. Định nghĩa:

Cho tập $U \subset \mathbb{R}^n$. Hàm vector $f : U \to \mathbb{R}^m$ được gọi là liên tục tại $a \in U$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x \in \{x \in U \mid \|x - a\| < \delta\}$ ta có $\|f(x) - f(a)\| \le \varepsilon$.

Chú ý:

a. Trong định nghĩa này không đòi hỏi $x \ne a$.

b. Theo định nghĩa của giới hạn hàm nhiều biến, nếu $a \in U'$ thì f liên tục tại a khi và chỉ khi $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

c. Hàm $f : U \to \mathbb{R}^m$ liên tục tại a khi và chỉ khi với mọi dãy $\{x_k\} \subset U, x_k \to a$ ta đều có $f(x_k) \to f(a)$ khi $k \to +\infty$.

d. Hàm $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được gọi là liên tục trên U nếu f liên tục tại mọi điểm $a \in U$.

e. Hàm f được gọi là liên tục đều trên U nếu với mọi $\varepsilon > 0$ tồn tại $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ (chỉ phụ thuộc ε) sao cho với mọi $x, x' \in U$ thỏa mãn $\|x - x'\| < \delta$ ta đều có $\|f(x) - f(x')\| < \varepsilon$.

5.2. Tính chất:

a. Cho $U \subset \mathbb{R}^n, V \to \mathbb{R}^m$. Nếu hàm $f : U \to V$ liên tục tại $a \in U$ và hàm $g : V \to \mathbb{R}^p$ liên tục tại $b = f(a)$ thì hàm hợp $g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ liên tục tại a.

b. Giả sử $f, g : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ là những hàm liên tục tại $a \in U$. Khi đó hàm $\alpha f + \beta g \left(\alpha, \beta \in \mathbb{R}\right)$ cũng là hàm liên tục tại a.

c. Hàm $f = (f_1, ..., f_m) : U \in \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ liên tục tại $a \in U$ khi và chỉ khi các hàm thành phần $f_1, ..., f_m$ của nó liên tục tại a.

5.3. Hàm liên tục theo từng biến:

Định nghĩa: Hàm $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ được gọi là liên tục theo biến x_i tại điểm $a = (a_1, ..., a_n)$ nếu với mọi $\varepsilon > 0$ cho trước tồn tại $\delta > 0$ sao cho với mọi $x_i \in A_i = \{x_i \in \mathbb{R} \mid (a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) \in U\}$ thỏa mãn $|x_i - a_i| < \varepsilon$ ta đều có $\|f(a_1, ..., a_{i-1}, x_i, a_{i+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)\| < \varepsilon$.

Từ định nghĩa ta suy ra rằng nếu f liên tục tại a thì f liên tục theo từng biến x_i $\left(i = \overline{1, n}\right)$ tại a. Điều ngược lại không đúng.

6. Đạo hàm và vi phân cấp một:

6.1. Khái niệm về ánh xạ khả vi:

Khi không sử dụng các phép tính ma trận, ta ký hiệu $f(x)=f(x_1,...,x_n)$ để chỉ hàm số của n biến và dùng ký hiệu $f(x)=(f_1(x),...,f_m(x))=(f_1(x_1,...,x_n),..,f_n(x_1,...,x_n))$ để chỉ hàm vector (gồm m tọa độ) của n biến.

Giả sử U là tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $f:U\to\mathbb{R}^m$ là hàm vector xác định trên U sao cho với $x\in U$ thì $f(x)=(f_1(x),...,f_m(x))\in\mathbb{R}^m$ trong đó $f_i:U\to R\left(i=\overline{1,m}\right)$ là các hàm thành phần của hàm vector f xác định trên U.

<u>Định nghĩa:</u> Hàm $f:U\to\mathbb{R}^m$ được gọi là khả vi tại điểm $a=(a_1,...,a_n)\in U$ nếu tồn tại một ánh xạ tuyến tính $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sao cho: $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\left\|f(a+h)-f(a)-A(h)\right\|}{\|h\|}=0$ hay là

$$\left\|f(a+h)-f(a)-A(h)\right\|=\varepsilon(h)\|h\|$$

trong đó $h=(h_1,...,h_n)\in\mathbb{R}^n$, $\varepsilon(h)\to 0$ khi $\|h\|\to 0$. Trong trường hợp này, ánh xạ tuyến tính A được gọi là đạo ánh hay đạo hàm của hàm vector f tại a và thường được ký hiệu là $Df(a)$ hay $f'(a)$.

<u>Chú ý:</u>

Trong công thức trên, phần tử $h\in\mathbb{R}^n$ nên $\|h\|$ là chuẩn của phần tử h trong $\mathbb{R}^n$. Nếu $\|h\|$ đủ nhỏ thì $a+h\in U$ do U mở, khi đó $f(a+h)\in\mathbb{R}^m$ và $f(a+h)-f(a)-A(h)\in\mathbb{R}^m$.

Như vậy, chuẩn của $f(a+h)-f(a)-A(h)$ là chuẩn trong $\mathbb{R}^m$. Hơn nữa từ định nghĩa hàm f khả vi tại điểm $a\in U$ ta có: $\left\|f(a+h)-f(a)-A(h)\right\|=o(\|h\|)$.

Dễ thấy f khả vi tại a khi và chỉ khi các hàm tọa độ của nó khả vi tại a.

Cụ thể, nếu $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\\ \vdots\\ f_m(x)\end{pmatrix}$ thì $Df(a)h=\begin{pmatrix} Df_1(a)h\\ Df_2(a)h\\ \vdots\\ Df_m(a)h\end{pmatrix}$

trong đó Df_i, $i=\overline{1,m}$ là các phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$.

Từ định nghĩa ta suy ngay ra rằng nếu f là phép biến đổi tuyến tính từ $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ thì f khả vi tại mọi $a\in\mathbb{R}^n$ và $Df(a)=f\quad\forall a\in\mathbb{R}^n$.

6.2. Định lý 6.2:

Giả thiết tập mở $U\subset\mathbb{R}^n$, hàm $f:U\to\mathbb{R}^m$ khả vi tại $a\in U$. Khi đó tồn tại duy nhất một ánh xạ tuyến tính $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ sao cho $\left\|f(a+h)-f(a)-A(h)\right\|=o(\|h\|)$.

6.3. Định lý 6.3:

Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$, nếu f khả vi tại $a \in U$ thì f liên tục tại a.

6.4. Định lý 6.4: (quy tắc lấy đạo hàm hàm hợp)

Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}^m$ khả vi tại $x_0 \in U$; V là tập mở chứa $f(U)$, $g : V \to \mathbb{R}^p$ khả vi tại $f(x_0)$. Khi đó, ánh xạ $F = g \circ f : U \to \mathbb{R}^p$ khả vi tại x_0 và $F'(x_0) = g'(f(x_0)) f'(x_0)$.

7. Đạo hàm riêng:

Giả sử $e_1, ..., e_n$ là cơ sở chính tắc trong không gian $\mathbb{R}^n$, U là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$ và $f : U \to \mathbb{R}^m$ là một hàm vector của n biến số, $x = (x_1, ..., x_n) \in U$.

7.1. Định nghĩa: Giới hạn $\lim\limits_{t \to 0} \dfrac{f(x + te_j) - f(x)}{t}$, nếu tồn tại, được gọi là đạo hàm riêng thứ j của hàm f tại x hay đạo hàm riêng theo biến x_j của hàm f tại x và ký hiệu là $D_j f(x)$ hay $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ hoặc $f'_{x_j}(x)$.

Như vậy khi $m = 1$ thì $f'_{x_j}(x)$ là số thực; khi $m \geq 2$ thì $f'_{x_j}(x)$ là vector thuộc $\mathbb{R}^m$.

Cụ thể, nếu $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_m(x) \end{pmatrix}$ thì $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_j}(x) \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_j}(x) \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f_m}{\partial x_j}(x) \end{pmatrix}$

Nếu hàm f có tất cả các đạo hàm riêng $D_j f(x)$, $j = \overline{1, n}$ tại mọi điểm $x \in U$ và các đạo hàm riêng này là những hàm liên tục trên U thì ta nói rằng f thuộc lớp C_1 trên U, ký hiệu là $f \in C_1(U)$.

<u>*Chú ý:*</u>

a. Khi tính đạo hàm riêng của hàm f theo một biến nào đó thì ta xem các biến khác là hằng số và áp dụng các quy tắc tính đạo hàm của hàm một biến số.

b. Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$ và $f:U\subset\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ là hàm khả vi tại $a\in U$. Vector gradient của f tại a là vector sau $\nabla f(a)=\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f(a)}{\partial x_j}e_j$ trong đó $(e_1,...,e_n)$ là cơ sở tự nhiên của $\mathbb{R}^n$.

<u>*Ví dụ 1:*</u> Cho $f(x,y)=x^y$, $x>0$. Khi đó: $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=yx^{y-1}$; $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=x^y\ln x$.

<u>*Ví dụ 2:*</u> Cho $f(x,y)=\begin{cases}\frac{xy}{x^6+y^3} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$. Tính $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ và $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

Ta có:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{x\to0}\frac{f(x,0)-f(0,0)}{x}=0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{y\to0}\frac{f(0,\mathrm{y})-f(0,0)}{y}=0$$

Chú ý rằng tuy hàm f có cả đạo hàm riêng theo hai biến x,y tại $(0,0)$ nhưng nó không liên tục tại $(0,0)$. Thật vậy, xét dãy $\left\{\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\right\}$ ta có $\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)\to(0,0)$ khi $n\to+\infty$.

Thế nhưng $f\left(\frac{1}{n},\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n^3}+1\right)}=\frac{n^4}{n^3+1}\to+\infty$ khi $n\to+\infty$.

7.2. Định lý 7.2:

Cho U là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$ và $f:U\to\mathbb{R}$. Nếu f khả vi tại $a\in U$ thì f có đạo hàm riêng theo mọi biến tại a và $f'(a)h=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)h_i$ trong đó $h=(h_1,...,h_n)\in\mathbb{R}^n$.

7.3. Định lý 7.3:

Cho U là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$ và $f:U\to\mathbb{R}$. Nếu f có các đạo hàm riêng $D_1f(x),...,D_nf(x)$ trong một lân cận nào đó của điểm $a=(a_1,...,a_n)$ và chúng là các hàm số liên tục tại a thì hàm f khả vi tại a và $Df(a)h=\sum_{i=1}^{n}D_if(a)h_i$.

<u>*Định nghĩa*</u>: Ta gọi đại lượng $\sum_{j=1}^{n}D_jf(a)h_j$ là vi phân toàn phần của hàm f tại a và ký hiệu

$$df(a) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(a) h_j = f'(a)h$$

Thông thường các số gia của các biến độc lập được ký hiệu là $h_j = dx_j$, $j = \overline{1,n}$

Khi đó: $df(a) = \sum_{j=1}^{n} D_j f(a) dx_j$

8. Đạo hàm theo hướng; Đạo hàm Gâteaux:

Để đơn giản ta xét hàm số nhiều biến (hàm vector tiến hành tương tự). Cho U là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$, $a \in U$, $x \in \mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ và $v = (v_1, ..., v_n) \in \mathbb{R}^n$.

8.1. Định nghĩa:

Nếu hàm $g : t \to f(a + tv)$ khả vi tại $t = 0$ thì $g'(0)$ được gọi là đạo hàm của f theo vector v tại a. Ta ký hiệu đạo hàm của f theo vector v tại a là $\frac{\partial f}{\partial v}(a)$ hay $f'_v(a)$ hoặc $D_v f(a)$. Như vậy thì: $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = g'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{f(a + tv) - f(a)}{t}$

Khi v có chuẩn bằng 1, ta gọi giới hạn này là đạo hàm của f theo hướng v.

Giống như nhiều kết quả trên, ta có: f có đạo hàm theo vector (hướng) v khi và chỉ khi các hàm tọa độ của nó có đạo hàm theo vector (hướng) v.

Định lý: Nếu f khả vi tại a thì nó có đạo hàm theo mọi hướng tại a và $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f(a)}{\partial x_i} v_i$ với mọi $v = (v_1, ..., v_n)$, tức là $\frac{\partial f}{\partial v}(a) = \langle \nabla f(a), v \rangle$

8.2. Đạo hàm Gâteaux:

Giả sử f có đạo hàm theo mọi hướng tại a. Ta nói rằng f khả vi yếu hay có đạo hàm theo Gâteaux tại a nếu $D_v f(a)$ là phép biến đổi tuyến tính (theo v) từ $\mathbb{R}^n$ vào $\mathbb{R}$.

Dễ chứng minh: Nếu f khả vi tại a thì f khả vi yếu tại a.

_Ví dụ 1:_ Xét hàm số hai biến $f(x, y) = \begin{cases} \frac{y^2}{x} \sin(x^2 + y^2) & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$

Tại điểm $(0,0)$ ta có:

- Hàm này có đạo hàm theo mọi hướng $v = (\cos\alpha, \sin\alpha)$ vì

$$\frac{\partial f}{\partial v}=\lim_{t\to 0}\frac{f\left(0+t\cos\alpha,0+t\sin\alpha\right)-f\left(0,0\right)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{t^2\sin^2\alpha\sin t^2}{t^2\cos\alpha}=0$$

- Hàm này không liên tục tại $\left(0,0\right)$ vì khi $x=y^4$ thì

$$\lim_{y\to 0} f\left(y^4,y\right)=\lim_{y\to 0}\frac{y^2}{y^4}\sin\left(y^8+y^2\right)=1\neq f\left(0,0\right)$$

__Ví dụ 2:__ Xét hàm số hai biến $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\right)\\ 0 & \left(\left(x,y\right)=\left(0,0\right)\right)\end{cases}$

Dễ dàng thấy rằng tại điểm $\left(0,0\right)$ ta có:

- Hàm này liên tục.
- Hàm này không có đạo hàm theo bất kỳ hướng nào.

__Ví dụ 3:__ Xét hàm số hai biến $\left(x,y\right)=\begin{cases}\dfrac{y^3}{x^2+y^2} & \left(\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\right)\\ 0 & \left(\left(x,y\right)=\left(0,0\right)\right)\end{cases}$

Dễ thấy rằng tại điểm $\left(0,0\right)$ ta có:

- Hàm này liên tục
- Hàm này có đạo hàm theo mọi hướng $\dfrac{\partial f}{\partial v}\left(0,0\right)=\sin^3\alpha$
- Hàm này không khả vi vì $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=0$; $\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=1$ trong khi đó với $\left(h,k\right)\to\left(0,0\right)$ thì

$$\frac{f\left(h,k\right)-f\left(0,0\right)-0h-k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\frac{h^2k}{\left(h^2+k^2\right)^{\frac{3}{2}}}\not\to 0$$

__Ví dụ 4:__ Xét hàm số hai biến $f\left(x,y\right)=\begin{cases}\left(x^2+y^2\right)\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & \left(\left(x,y\right)\neq\left(0,0\right)\right)\\ 0 & \left(\left(x,y\right)=\left(0,0\right)\right)\end{cases}$

Dễ thấy rằng tại điểm $\left(0,0\right)$ ta có:

- Hàm này khả vi tại $\left(0,0\right)$ vì $\dfrac{\partial f}{\partial x}\left(0,0\right)=0;\dfrac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)=0$

$$\frac{f\left(h,k\right)-f\left(0,0\right)-0h-0k}{\sqrt{h^2+k^2}}=\sqrt{h^2+k^2}\sin\frac{1}{h^2+k^2}\to 0$$

- Hàm này không có các đạo hàm riêng liên tục tại $(0,0)$ vì

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\begin{cases}2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2} & ((x,y)\neq(0,0))\\ 0 & ((x,y)=(0,0))\end{cases}$$

không liên tục tại $(0,0)$.

9. Công thức số gia hữu hạn:

Ta gọi một đoạn trong $\mathbb{R}^n$ với hai đầu mút $a,b\in\mathbb{R}^n$ là tập hợp $[a,b]=\{(1-t)a+tb, 0\leq t\leq 1\}$.

__Định lý__: (công thức số gia hữu hạn) Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$, $[a,b]$ là một đoạn chứa trong U và $f:U\to\mathbb{R}$ là một hàm khả vi trên U. Khi đó tồn tại $c\in[a,b]$ sao cho:

$$f(b)-f(a)=Df(c)(b-a)=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_i}(c)(b_i-a_i)$$

trong đó $a=(a_1,...,a_n);b=(b_1,...,b_n)$

Chú ý: Định lý số gia hữu hạn nói chung không đúng cho hàm vector.

10. Các phép tính về đạo ánh:

10.1. Định lý: Cho U là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$, và $f,g:U\to\mathbb{R}$. Nếu f,g khả vi tại $a\in U$ thì ta có các công thức sau:

(i) $D(f+g)(a)=Df(a)+Dg(a)$

(ii) $D(fg)(a)=g(a)Df(a)+f(a)Dg(a)$

(iii) Nếu $g(a)\neq 0$ thì $D\left(\frac{f}{g}\right)(a)=\frac{g(a)Df(a)-f(a)Dg(a)}{g^2(a)}$

10.2. Biểu diễn đạo hàm bởi ma trận:

Giả sử U là một tập hợp mở trong $\mathbb{R}^n$, $f=(f_1,...,f_m)$ là một ánh xạ từ U vào $\mathbb{R}^m$ và $a\in U$. Ánh xạ f khả vi tại a khi và chỉ khi mỗi hàm thành phần f_i khả vi tại a. Khi đó:

$$Df(a)=(Df_1(a),...,Df_m(a))$$

__Chú ý:__

Ta có $Df_i(a)$ có biểu diễn ma trận là $(D_1f_i(a),...,D_nf_i(a))$. Vì thế, ma trận của ánh xạ tuyến tính $Df(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ là: $J_f(a)=\begin{pmatrix}D_1f_1(a) & D_2f_1(a) & \dots & D_nf_1(a)\\ D_1f_2(a) & D_2f_2(a) & \dots & D_nf_2(a)\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ D_1f_m(a) & D_2f_m(a) & \dots & D_nf_m(a)\end{pmatrix}$ (ma trân Jacobi của hàm f tại a). Khi $m = n$, ma trận này là một ma trận vuông, định thức của nó được gọi là Jacobian của f tại a và ký hiệu là $\dfrac{D(f_1,...,f_n)}{D(x_1,...,x_n)}(a)$.

10.3. Đạo hàm riêng của hàm hợp:

Cho các tập mở $U \in \mathbb{R}^n, V \in \mathbb{R}^m$ và các ánh xạ $f: U \to V$ khả vi tại $a \in U$, $g: V \to \mathbb{R}$ khả vi tại $b = f(a)$. Khi đó: $\dfrac{\partial}{\partial x_j}(g \circ f)(a) = \sum_{i=1}^{m} \dfrac{\partial g}{\partial y_i}(b)\dfrac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)$, $j = \overline{1,n}$

Ví dụ: Cho $f: U \subset \mathbb{R}^3 \to V \subset \mathbb{R}^3$ xác định bởi

$$f(x,y,z) = \big(u(x,y,z), v(x,y,z), t(x,y,z)\big);\ g: V \to \mathbb{R}$$

thì $h = g \circ f$ có dạng $h = g\big(u(x,y,z), v(x,y,z), t(x,y,z)\big)$. Khi đó, các đạo hàm riêng của h được tính theo các công thức sau:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial x}$$
$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial y}$$
$$\frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial g}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial t}\frac{\partial t}{\partial z}$$

10.4. Dùng đạo hàm để tính gần đúng:

Nếu f là hàm số khả vi tại a thì ta có: $f(a+h) = f(a) + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i + o(\|h\|)$ trong đó $h = (h_1,...,h_n)$. Vì thế nếu $\|h\|$ đủ nhỏ, ta có công thức xấp xỉ: $f(a+h) \approx f(a) + \sum_{i=1}^{n} \dfrac{\partial f}{\partial x_i}(a) h_i$.

Ví dụ: Tính gần đúng $\sqrt{(4.05)^2 + (3.07)^2}$

Xét hàm $f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2}$

Ta có $\dfrac{\partial f}{\partial x} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$; $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$

Các đạo hàm riêng này liên tục trong lân cận của điểm $(4,3)$ nên f khả vi tại $(4,3)$. Ta có:

$$f(4+0.05, 3+0.07) \approx f(4,3) + \frac{\partial f}{\partial x}(4,3)0.05 + \frac{\partial f}{\partial y}(4,3)0.07$$

hay $\sqrt{(4.05)^2 + (3.07)^2} \approx 5 + \dfrac{4}{5}0.05 + \dfrac{3}{5}0.07 = 5.08$

11. Khảo sát cực trị của hàm nhiều biến số:

11.1. Định nghĩa: Cho hàm $f: U$ mở $\to \mathbb{R}$. Điểm $a \in U$ được gọi là điểm cực trị địa phương của hàm f nếu tồn tại một số $r > 0$ sao cho hình cầu $B(a,r) \subset U$ và với mọi $x \in B(a,r)$ hiệu $f(x) - f(a)$ có dấu không đổi.

Nếu $f(x) - f(a) \le 0$ với mọi $x \in B(a,r)$ thì a được gọi là điểm cực đại của hàm f.

Nếu $f(x) - f(a) \ge 0$ với mọi $x \in B(a,r)$ thì a được gọi là điểm cực tiểu của hàm f.

11.2. Định lý: (Fermat)

Nếu $f: U$ mở $\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ là hàm khả vi tại a và a là điểm cực trị của hàm f thì $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = 0$, $i = \overline{1,n}$ và do đó $Df(a) = 0$.

11.3. Cực trị hàm nhiều biến có điều kiện - Phương pháp nhân tử Lagrange:

<u>Định lý</u>: Giả sử U là một tập mở trong $\mathbb{R}^2$, $f: U \to \mathbb{R}$ và (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm f với điều kiện $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Hơn nữa, giả sử rằng:

a. Các hàm $f(x,y), \varphi(x,y)$ có các đạo hàm riêng liên tục trong một lân cận của điểm (x_0, y_0)

b. $\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \ne 0$

Khi đó, tồn tại một số λ_0 sao cho cùng với x_0 và y_0 tạo thành nghiệm của hệ phương trình sau (đối với λ, x, y):

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + \lambda \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x,y) = 0 \\ \varphi(x,y) = 0 \end{cases}$$

(Đây chính là điều kiện cần của cực trị ràng buộc)

<u>Phương pháp</u>:

Đặt $\phi(x,y,\lambda) = f(x,y) + \lambda \varphi(x,y)$ (hàm Lagrange). Hệ trên trở thành: $\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial \lambda} = 0 \end{cases}$

Mặt khác, với (x,y) thỏa mãn $\varphi(x,y) = 0$ thì $\phi(x,y,\lambda_0) - \phi(x_0,y_0,\lambda_0) = f(x,y) - f(x_0,y_0)$.

Do đó, nếu (x_0, y_0) là điểm cực trị của hàm $\phi(x, y, \lambda_0)$ thì (x_0, y_0) cũng là điểm cực trị của hàm $f(x, y)$ với điều kiện $\varphi(x, y) = 0$. Bài toán đưa về việc tìm nghiệm của hệ phương trình trên.

Chú ý: Kết quả trên có thể mở rộng cho các hàm số với số biến nhiều hơn như sau:

Cho tập mở $U \subset \mathbb{R}^n$ và hàm $f : U \to \mathbb{R}$. Ta xét vấn đề tìm cực trị của hàm f với điều kiện các biến $x_1, ..., x_n$ thỏa mãn m điều kiện ràng buộc sau: $\varphi_i(x_1, ..., x_n) = 0$, $i = \overline{1, m}$ $(m < n)$ trong đó φ_i là các hàm ánh xạ từ U vào $\mathbb{R}$.

Giả sử rằng các hàm f và φ_i $\left(i = \overline{1, m}\right)$ đều thuộc lớp $C^1(U)$. Ta lập hàm Lagrange:

$\phi(x_1, ..., x_n, \lambda_1, ..., \lambda_m) = f(x_1, ..., x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i(x_1, ..., x_n)$ trong đó $\lambda_1, ..., \lambda_m$ là các hằng số.

Khi đó, điểm cực trị có điều kiện của hàm f phải nằm trong số các nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \phi}{\partial x_j} = 0\left(j = \overline{1, n}\right) \\ \varphi_i = 0\left(i = \overline{1, m}\right) \end{cases}$$

Ví dụ:

Tìm cực trị của hàm (ba biến) $f(x, y, z) = yz$ với điều kiện $x^2 + y^2 = 1$; $y + z = 0$.

Lời giải:

Ta lập hàm Lagrange: $\phi(x, y, z, \lambda, \mu) = yz + \lambda(x^2 + y^2 - 1) + \mu(y + z)$

Giải hệ phương trình: $\begin{cases} \phi'_x = 2\lambda x \\ \phi'_y = z + 2\lambda y + \mu \\ \phi'_z = y + \mu = 0 \\ x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ y + z = 0 \end{cases}$ tìm được 4 điểm "tiêu chuẩn" sau:

$$(x_0, y_0, z_0, \lambda_0, \mu_0) = \begin{cases} (0, 1, -1, 1, -1) \\ (0, -1, 1, 1, 1) \\ (1, 0, 0, 0, 0) \\ (-1, 0, 0, 0, 0) \end{cases}$$

Thay vào ta có $\max f(x, y, z) = 0$ tại $(1, 0, 0)$ và $(-1, 0, 0)$

$\min f(x, y, z) = -1$ tại $(0, 1, -1)$ và $(0, -1, 1)$

C. Tài liệu tham khảo:

1. Bài giảng Giải tích tập I, II - Nguyễn Duy Tiến
2. Giáo trình Giải tích tập 1, 2 - Trần Đức Long, Nguyễn Đình Sang, Hoàng Quốc Toàn
3. Tài liệu Chuyên toán Giải tích 12 - Đoàn Quỳnh, Trần Nam Dũng, Hà Huy Khoái, Đặng Hùng Thắng, Nguyễn Trọng Tuấn