PIMA 2017 - Projects in Mathematics and Applications
Introduction to Game Theory and Market Design

Nguyễn Thị Mai Anh*

July 2017

1 Game theory - Lý thuyết trò chơi

Lý thuyết trò chơi (game theory) nghiên cứu về những tương tác chiến lược (strategic interactions) giữa các cá thể có hành vi ảnh hưởng lẫn nhau. Các cá thể này có thể là các doanh nghiệp cạnh tranh trên cùng một thị trường sản phẩm, các quốc gia thương thảo để đạt đến thống nhất trong các hiệp định thương mại chung, hoặc cũng có thể là một cặp đôi quyết định xem nên làm gì cho buổi tối thứ sáu.

Lý thuyết trò chơi sử dụng các mô hình toán giúp lí giải những hành vi quan sát được trên thực tế và dự đoán các hành vi của các cá thể trong trò chơi dựa trên luật chơi định sẵn và những giả định về mục đích của các cá thể này. Chúng ta hãy xem xét một ví dụ nhỏ về cách tính điểm trong một lớp học. Cách tính điểm thứ nhất là tất cả học sinh sẽ được nâng lên cùng một số điểm sao cho người được điểm cao nhất sẽ được số điểm tối đa (ví dụ, 10.0). Tưởng tượng rằng để đạt điểm cao cần nỗ lực, và mỗi học sinh chỉ quan tâm đến điểm số của mình. Trong trường hợp này chúng ta dự đoán gì về hành vi của các bạn học sinh? Phải, tất cả họ sẽ cùng nộp giấy trắng và cùng đạt điểm 10.0. Nếu như điểm số sẽ không được nâng thì từ kinh nghiệm bản thân có lẽ các bạn cũng đoán được rằng một số những "trao đổi hai bên cùng có lợi" sẽ diễn ra trong giờ kiểm tra. Một cách tính điểm khác là điều chỉnh điểm theo phân phối chuẩn (Bell curve system) được sử dụng ở nhiều trường đại học ở Singapore và Mỹ. Lúc này mỗi học sinh không chỉ có động cơ làm thật tốt bài của mình mà quan trọng hơn là làm tốt hơn các bạn khác. Hệ thống này thúc đẩy học sinh nỗ lực hết mình và hạn chế trao đổi trong giờ kiểm tra, tuy nhiên cũng đồng thời hạn chế việc học nhóm hay những trao đổi tích cực trong giờ học.

Như vậy tùy thuộc vào hành vi mà ta mong muốn ở người chơi (desirable behaviours) mà sẽ có những cơ chế (mechanisms) phù hợp. Lý thuyết trò chơi giúp

*MIT Department of Economics, PhD student.

ta đưa ra sự lựa chọn này. Thiết kế cơ chế (mechanism design) đặt ngược lại vấn đề của lý thuyết trò chơi (reverse engineering), là công cụ đắc lực cho xây dựng hệ thống luật pháp, thiết kế hợp đồng, điều hành thị trường và hơn thế nữa. Có thể nói chất liệu nghiên cứu cũng như những ứng dụng của lý thuyết trò chơi vào các vấn đề thực tế là vô cùng thú vị và phong phú.

1.1 Khái niệm cơ bản

Một trò chơi được cấu thành bởi ba yếu tố chính:

1. Người chơi (players), thường kí hiệu là $N = \{1, ..., n\}$.

2. Tập các chiến lược được phép cho mỗi người chơi (strategy sets), kí hiệu là S_i cho mỗi $i \in N$. Một vector $s = (s_1, ..., s_n)$ với $s_i \in S_i$ cho mỗi $i \in N$ được gọi là một tổ hợp chiến lược (strategy profile). Kí hiệu $S = S_1 \times ... \times S_n$ cho tập tất cả các tổ hợp chiến lược khả thi. Ta kí hiệu $s_{-i} = (s_1, ..., s_{i-1}, s_{i+1}, ..., s_n)$ với $i \in N$ để chỉ tổ hợp chiến lược của các người chơi khác i, còn gọi là tổ hợp chiến lược đối thủ (opponent strategy profile).

3. Giá trị (payoffs) mỗi người chơi nhận được ứng với từng tổ hợp hành động của tất cả các người chơi, được biểu diễn bởi các hàm giá trị. Hàm giá trị (payoff function) của người chơi $i \in N$ là một hàm $u_i : S \to \mathbb{R}$.

Trước hết, ta sẽ mô tả hai bài toán đơn giản (và nổi tiếng) bằng ngôn ngữ lý thuyết trò chơi. Ở hai bài toán này, mỗi người chơi có một tập các hành động, cũng là tập các chiến lược. Tất cả người chơi biết mọi thông tin về trò chơi (complete information) và họ thực hiện hành động đồng thời (simultaneously).

Ví dụ 1 *Prisoners' Dilemma (theo [1])*

Có hai kẻ tình nghi bị cảnh sát bắt giữ và cách ly. Chỉ cần một trong hai người thú tội là đã có thể khẳng định tội danh của hai người này. Vị cảnh sát đưa ra thỏa thuận sau với mỗi kẻ tình nghi: nếu cả hai người cùng nhận tội thì mỗi người sẽ bị phạt 5 năm tù giam; nếu chỉ đúng một người nhận tội người thú tội sẽ được khoan hồng và kẻ im lặng sẽ chịu mức phạt cao hơn, là 10 năm tù giam; nếu cả hai người không nhận tội thì cả hai sẽ bị kết án cho một tội nhẹ và bị phạt 1 năm tù giam.

Trò chơi này được tóm tắt như sau.

1. Players: $N = \{1, 2\}$.

2. Strategies: $S_i = \{\text{Thú tội } (C), \text{Im lặng } (S)\}$ cho $i = 1, 2$. Như vậy tập các tổ hợp chiến lược là $S = S_1 \times S_2 = \{(C, C), (C, S), (S, C), (S, S)\}$.

3. Payoffs: $u_i : S \to \mathbb{R}$ với $i = 1, 2$, được biểu diễn qua ma trận thưởng phạt (payoff matrix) sau

		Player 2	
		C	S
Player 1	C	(-5,-5)	(0,-10)
	S	(-10,0)	(-1,-1)

Bảng 1: Prisoners' Dilemma

Ví dụ 2 *Cournot duopoly (theo [2])*

Hai doanh nghiệp cạnh tranh trên một thị trường có nguồn cầu cố định sao cho hàm giá cả từ nguồn cầu (inverse demand function) là $P(Q) = a - bQ$ cho $Q \in [0, a/b]$ với $a, b > 0$. Mỗi doanh nghiệp sẽ cung cấp một lượng sản phẩm vào thị trường, với mục đích là tối đa hóa lợi nhuận của doanh nghiệp mình. Chi phí cho mỗi sản phẩm được sản xuất là $c \in (0, a)$, như nhau cho cả hai doanh nghiệp. Giá cả trên thị trường được quyết định bởi cân bằng cung-cầu, với tổng cung bằng tổng lượng cung của hai doanh nghiệp.[1]

1. Players: $N = \{1, 2\}$.

2. Strategies: $S_i = \{q_i \in \mathbb{R} : q_i \geq 0\} = \mathbb{R}_+$ cho $i = 1, 2$.

3. Payoffs: cũng chính là lợi nhuận của doanh nghiệp. Trước hết, ta viết giá thị trường thành hàm của lượng cung của hai doanh nghiệp:

$$P(q_1, q_2) = \max\{0, a - b(q_1 + q_2)\}.$$

Khi đó lợi nhuận[2] của doanh nghiệp i với $i = 1, 2$ là

$$\Pi_i(q_1, q_2) = (P(q_1, q_2) - c)q_i.$$

[1]Trong ví dụ này, hàm cầu là $Q(P) = \frac{a}{b} - \frac{1}{b}P$ với $P \in [0, a]$. Tại sao thông thường hàm cầu lại tỉ lệ nghịch với giá cả? Một người chỉ mua sản phẩm khi giá trị của sản phẩm đối với người này lớn hơn giá của sản phẩm đó. Như vậy khi giá sản phẩm giảm, sẽ có nhiều người muốn mua nó hơn, hoặc một người sẽ muốn mua nhiều hơn, nghĩa là nhu cầu cho sản phẩm đó sẽ tăng lên. Ở ví dụ này quyết định của hai doanh nghiệp là tung ra thị trường bao nhiêu sản phẩm, nhưng cũng có trường hợp doanh nghiệp quyết định mức giá cho sản phẩm của mình. Mô hình mà hai doanh nghiệp cạnh tranh dựa trên giá cả được gọi là "Betrand duopoly".

[2]Lợi nhuận (profit) = tổng thu (total revenue) - tổng chi (total cost), với tổng thu = giá bán mỗi sản phẩm $\times$ số lượng sản phẩm bán. Trong ví dụ này mỗi sản phẩm sản xuất ra tốn chi phí không đổi c, nên hàm tổng chi là $TC(q_i) = c \times q_i$.

Chiến lược hỗn hợp

Chiến lược hỗn hợp (**mixed strategies**) là chiến lược cho phép người chơi "randomize" giữa một số hành động, nghĩa là người chơi có thể chọn ngẫu nhiên các hành động theo một xác suất nào đó.

Ví dụ 3 *Trò chơi Oẳn Tù Tì*

Hai bạn Linh và Trung chơi trò Oẳn Tù Tì. Như thông thường, mỗi bạn có thể ra Kéo, Búa, hoặc Bao; Búa thắng Kéo, Bao thắng Búa, và Kéo thắng Bao. Tập các chiến lược thuần túy (**pure strategies**) của Linh ($i = 1$) và Trung ($i = 2$) là $S_i = \{\text{Kéo, Búa, Bao}\}$ với $i = 1, 2$. Với mỗi tổ hợp chiến lược thuần túy $(s_1, s_2) \in S_1 \times S_2$, ta viết $u_i(s_1, s_2)$ để chỉ giá trị i nhận được khi người chơi 1 chọn s_1 và người chơi 2 chọn s_2. Giả sử người thắng nhận giá trị 1 và thua nhận giá trị -1.

Nếu ta cho phép người chơi ra Kéo, Búa, hay Bao với xác suất nào đó, thì một chiến lược hỗn hợp được định nghĩa là một hàm $\sigma_i : S_i \to [0, 1]$ sao cho $\sigma_i(s_i) \in [0, 1]$ cho mỗi $s_i \in S_i$ và $\sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) = 1$. Khi này $\sigma_i(s_i)$ cho biết xác suất mà người chơi i chọn s_i. Kí hiệu $\Delta(S_i)$ cho tập tất cả các chiến lược hỗn hợp của i và $\Sigma = \Delta(S_1) \times ... \times \Delta(S_n)$ cho tập tất cả các tổ hợp chiến lược hỗn hợp. Mở rộng hàm giá trị của i sang tập các tổ hợp chiến lược hỗn hợp, ta có $u_i : \Sigma \to \mathbb{R}$, định nghĩa bởi

$$u_i(\sigma_i, \sigma_{-i}) = \sum_{s \in S} \left(\prod_{i \in N} \sigma_i(s_i) \right) u_i(s) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Mở rộng

Trong các trò chơi với "incomplete information", ta cần định nghĩa rõ thông tin mà từng người chơi có. Quay lại với ví dụ về lớp học khi điểm được tịnh tiến, có thể giả sử rằng mỗi học sinh "ex ante" có xác suất p là thích các bạn khác bị điểm thấp (kẻ phản bội) và xác suất $(1 - p)$ là chỉ quan tâm đến điểm và nỗ lực phải bỏ ra của bản thân. Mỗi bạn biết mình có là kẻ phản bội hay không, nhưng không biết chính xác bản chất của các bạn khác. Tương tự khi tham gia đấu giá, thông thường người chơi biết giá trị của vật phẩm đấu giá với mình, nhưng không biết giá trị của nó với những người chơi còn lại. Một trường hợp khác là trò chơi diễn ra qua nhiều bước tuần tự (dynamic games). Lúc này cần định nghĩa các bước của trò chơi, và ở mỗi bước phải xác định người chơi nào được phép thực hiện hành động cũng như thông tin người đó có ở bước này.

Trong những trường hợp này, cần phân biệt rõ giữa chiến lược (strategies) và hành động (actions). Hãy cùng xem xét ví dụ sau.

Ví dụ 4 *Bài toán bốc từ 21 hòn sỏi*

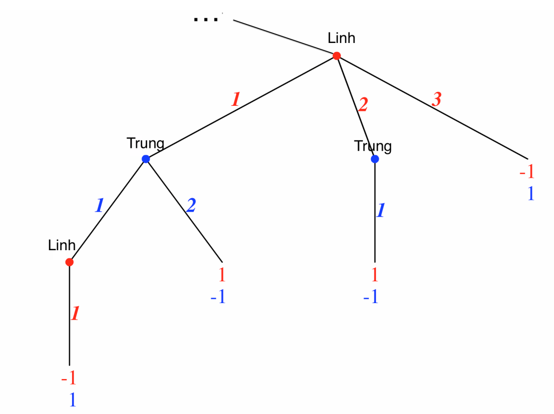
Linh và Trung cùng chơi bốc sỏi. Luật chơi như sau: trên bàn có 21 hòn sỏi và hai bạn lần lượt bốc một số lượng sỏi từ những hòn sỏi đang còn ở trên bàn, mỗi lượt phải bốc 1, 2, hoặc 3 hòn; bạn nào bốc hòn sỏi cuối cùng thua. (Vì thua trong trò chơi Oẳn Tù Tì, Linh là người đi trước!)

Đây là một "dynamic game" với "complete information", có thể được biểu diễn bởi đồ thị hình cây (tree), gồm các đốt cây (nodes), nhành cây (edges) và lá cây (leaves). Mỗi đốt cây gắn liền với một người chơi (Linh/Trung) và toàn bộ lịch sử của trò chơi (Linh và Trung đã tuần tự bốc bao nhiêu hòn sỏi trong những lượt đã chơi). Gốc cây (root) cũng là một đốt cây, là khởi điểm của trò chơi. Từ mỗi đốt cây mở ra các nhành cây gắn với những hành động khả thi ở lượt đó (bốc 1, 2, hay 3 hòn sỏi). Mỗi lá cây gắn liền với một "payoff vector", cho biết giá trị của từng người chơi khi trò chơi kết thúc ở chiếc lá đó (ở trò chơi này giả sử người thắng được giá trị 1, thua được giá trị -1).

Trong khi một hành động có thể là bốc 1, 2, hay 3 hòn sỏi, thì một chiến lược phải cho biết hành động mà người chơi lựa chọn tại từng đốt cây mà người chơi này sở hữu. Như vậy có thể hiểu một chiến lược như một "contingent plan". Tưởng tượng rằng Linh và Trung bị đau bụng thì em của hai bạn này hoàn toàn có thể chơi trò chơi này với nhau chính xác như các anh mình sẽ chơi nếu được biết chiến lược của anh mình.

Lưu ý rằng nhiều trò chơi có cấu trúc thông tin phức tạp và diễn biến qua nhiều giai đoạn. Vì thời gian có hạn, chúng ta sẽ chỉ tập trung vào những trò chơi mà tất cả người chơi thực hiện hành động cùng một lúc và họ hiểu rõ động cơ của nhau (simultaneous-move game with complete information). Chúng ta cũng sẽ tập trung vào hai khái niệm kết quả (solution concepts) là chiến lược áp đảo (dominant strategy) và cân bằng Nash (Nash equilibrium).

Hình 1: Một trong những subgames mà đến lượt Linh bốc sỏi và còn 3 hòn sỏi



1.2 Dominant strategy

Chiến lược áp đảo của một người chơi là chiến lược đem lại kết quả tốt nhất cho người chơi này bất kể chiến lược của tất cả các người chơi còn lại. Chính xác hơn, s_i là một chiến lược áp đảo mạnh (**strictly dominant strategy**) của người chơi i nếu như với mỗi $s_i' \in S_i \backslash \{s_i\}$,

$$u_i(s_i, s_{-i}) > u_i(s_i', s_{-i})$$

cho tất cả các $s_{-i} \in S_{-i}$. Ở đây, $S_{-i} = S_1 \times ... \times S_{i-1} \times S_{i+1} \times ... \times S_n$ là tập tất cả các tổ hợp chiến lược đối thủ (opponent strategy profiles).

Chiến lược s_i là một chiến lược áp đảo yếu (**weakly dominant strategy**) nếu như với mỗi $s_i' \in S_i \backslash \{s_i\}$,

$$u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i})$$

cho tất cả các $s_{-i} \in S_{-i}$ với ít nhất một dấu "$>$" cho một tổ hợp chiến lược đối thủ nào đó.

Quay lại ví dụ 1, ta thấy rằng $u_1(C, C) = -5 > u_1(S, C) = -10$ và $u_1(C, S) = 0 > u_1(S, S) = -1$. Như vậy "thú tội" là chiến lược áp đảo của người chơi thứ nhất. Tượng tự, "thú tội" cũng là chiến lược áp đảo của người chơi thứ hai. Kết quả (outcome) của trò chơi này sẽ là (C, C), và mỗi người chơi sẽ nhận được giá trị -5, thấp hơn so với khi cả hai cùng im lặng. Nói cách khác nếu cả hai nghi phạm "hợp tác" và cùng im lặng thì cả hai cùng được lợi hơn so với cùng thú tội, nhưng điều này lại không xảy ra. Trên thực tế những tình huống mà động cơ cá nhân mâu thuẫn với động cơ của tập thể là rất nhiều. Hãy nghĩ xem tại sao nhiều người chen hàng khi đi mua sắm hay lấn tuyến khi tham gia giao thông? Tại sao các quốc gia lại chạy đua vũ trang? Tại sao khó để đạt được và giữ vững những hiệp định bảo vệ môi trường?

Bài tập 1 *Second-price auction*

Có một nhóm $N = \{1, 2, ..., n\}$ người cùng đấu giá cho một món đồ cổ. Mỗi người sẽ viết một con số để đấu giá vào một tờ giấy và gửi lại cho người tổ chức. Người đưa ra con số đấu giá lớn nhất (bid) sẽ nhận được món đồ đó, nhưng chỉ phải chi trả con số đấu giá cao thứ nhì. Trong trường hợp có nhiều người cùng đưa ra giá đấu cao nhất, thì người có thứ tự ưu tiên cao hơn sẽ được nhận món đồ và chi trả số tiền mình đã đấu. Thứ tự ưu tiên được quy định theo cách ta đánh dấu người chơi. Những người đấu giá thua không có được món đồ và cũng không phải chi trả gì. Chứng minh rằng đưa ra giá đấu bằng đúng giá trị của món đồ đó với mình là chiến lược áp đảo yếu của mỗi người chơi.

Gợi ý: Giả sử $N = \{1, 2, 3\}$ và giá trị của sản phẩm đó với họ là $(v_1, v_2, v_3) = (4, 6, 5)$. Nếu số đấu giá là $(b_1, b_2, b_3) = (3, 3, 4)$ thì người chơi 3 thắng sản phẩm và nhận giá trị là $5 - 3 = 2$; giá trị những người chơi còn lại nhận được là 0. Nếu số đấu giá là $(3, 4, 4)$ thì người chơi 2 thắng sản phẩm và nhận giá trị là $6 - 4 = 2$. Để chứng minh chiến lược $b_i = v_i$ là một chiến lược áp đảo yếu, ta cần chứng minh: $v_i \in \arg\max_{b_i} u_i(b_i, b_{-i})$ $(\geq)$ với từng b_{-i}; với mọi $b_i' \neq v_i$, tồn tại tổ hợp chiến lược đối thủ b_{-i} sao cho đấu giá v_i tốt hơn hẳn đấu giá b_i' $(>)$. Mấu chốt để chia trường hợp trong bài toán này là chỉ cần so sánh giá đấu của i với giá đấu cao nhất trong giá đấu của những người chơi còn lại.

1.3 Nash equilibrium

Cân bằng Nash (Nash equilibrium) là một khái niệm kết quả đặc biệt quan trọng trong lý thuyết trò chơi, được đặt tên theo nhà toán học John Forbes Nash (1928 - 2015). Câu chuyện về John Nash và luận văn Tiến sĩ toán dài 28 trang của ông về "noncooperative game theory" là một câu chuyện nổi tiếng đến tận ngày nay. Một kết quả quan trọng được ông chứng minh là nếu một trò chơi có n người chơi mà mỗi người chơi chỉ được cho phép một số lượng giới hạn (finite) hành động và được sử dụng các chiến lược hỗn hợp (mixed strategies) thì trò chơi đó có ít nhất một cân bằng Nash. Như chúng ta sẽ thấy, cân bằng Nash là một khái niệm kết quả yếu hơn so với chiến lược áp đảo, tuy nhiên ít khi người chơi có chiến lược áp đảo còn cân bằng Nash lại tồn tại trong nhiều môi trường.

Trong chiến lược thuần túy

Một tổ hợp chiến lược (strategy profile) $s^* = (s_1^*, ..., s_n^*)$ được gọi là một **pure-strategy Nash equilibrium** (PSNE) nếu như với mỗi người chơi $i \in N$,

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i', s_{-i}^*)$$

với mọi $s_i' \in S_i$. Nói cách khác, không có người chơi nào có động cơ để thay đổi chiến lược của mình nếu những người chơi khác giữ nguyên chiến lược của họ. Cân bằng Nash cũng có thể được định nghĩa dựa vào hàm đáp trả tối ưu (**best response correspondence**) của các người chơi, $BR_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$ sao cho với mỗi $s_{-i} \in S_{-i}$,

$$\begin{aligned} BR_i(s_{-i}) &= \arg\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}) \\ &= \{s_i \in S_i : u_i(s_i, s_{-i}) \geq u_i(s_i', s_{-i}), \forall s_i' \in S_i\} \end{aligned}$$

Khi đó s^* là một PSNE nếu như với mọi $i \in N$,

$$s_i^* \in BR_i(s_{-i}^*).$$

Như vậy, nếu ta định nghĩa $BR : S \rightrightarrows S$ bởi

$$BR(s) = BR_1(s_{-1}) \times ... \times BR_i(s_{-i}) \times ... \times BR_n(s_{-n})$$

thì một PSNE s^* là một "fixed point" của hàm BR, nghĩa là $s^* \in BR(s^*)$.[3]

Hãy cùng tìm PSNE của trò chơi sau.

Ví dụ 5 *Battle of the Sexes*

Một cặp đôi đăng kí tham dự vũ hội của trường và vũ hội yêu cầu bạn nam và bạn nữ trong cùng một cặp đôi phải mặc trang phục có màu giống nhau; bạn nữ thích màu trắng hơn màu đen, còn bạn nam thích màu đen hơn màu trắng; và cả hai bạn đều biết về sở thích này của nhau. Ma trận thưởng phạt của trò chơi này như sau.

		Boy	
		W	B
Girl	W	$(\underline{3},\underline{1})$	(0,0)
	B	(0,0)	$(\underline{1},\underline{3})$

Bảng 2: Battle of the Sexes

Để tìm nhanh các PSNEs: (i) cố định một người chơi rồi tìm ra payoffs cao nhất có thể của người chơi này cho mỗi tổ hợp chiến lược đối thủ và gạch chân dưới payoffs này, (ii) làm tương tự cho tất cả các người chơi, (iii) tổ hợp hành động tương ứng với tổ hợp giá trị mà tất cả giá trị đều được gạch chân chính là một PSNE. Như vậy PSNE của trò chơi này là cả hai cùng mặc màu trắng, hoặc cả hai cùng mặc màu đen. Ta cũng có thể kiểm chứng rằng cả hai nghi phạm cùng thú tội là một PSNE của trò chơi Prisoners' Dilemma. Hơn nữa, kết quả này là cân bằng Nash duy nhất của trò chơi.

Ý tưởng về cân bằng Nash thật ra đã xuất hiện từ bài toán cạnh tranh Cournot (Cournot competition), trước cả khi khái niệm này được John Nash định nghĩa trong luận văn của mình. Chúng ta sẽ tìm PSNE trong bài toán cạnh tranh Cournot đơn giản gồm hai doanh nghiệp, giới thiệu trong ví dụ 2. Trước hết ta tìm $BR_1 : A_2 \to A_1$. Doanh nghiệp 1 muốn tối đa hóa lợi nhuận

[3]Ở đây ta định nghĩa $BR_i : S_{-i} \rightrightarrows S_i$ để nhấn mạnh rằng hàm đáp trả tối ưu của i không phụ thuộc vào chiến lược hiện tại của i. Thông thường, hàm đáp trả tối ưu được định nghĩa là $BR_i : S \rightrightarrows S_i$.

$$\Pi_1(q_1, q_2) = \max\{-c, (a-c) - b(q_1 + q_2)\} \times q_1$$

cho mỗi lượng sản phẩm q_2 sản xuất bởi doanh nghiệp 2. Nếu $q_2 \geq \frac{a-c}{b}$ thì lựa chọn tối ưu của doanh nghiệp 1 là không sản xuất sản phẩm nào. Nếu $q_2 < \frac{a-c}{b}$ thì doanh nghiệp 1 sẽ sản xuất một lượng bằng

$$\arg\max_{q_1 \geq 0}((a-c) - b(q_1 + q_2))q_1 = \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{b}.$$

Như vậy,

$$BR_1(q_2) = \max\left\{0, \frac{a-c}{2b} - \frac{q_2}{b}\right\}.$$

Tương tự

$$BR_2(q_1) = \max\left\{0, \frac{a-c}{2b} - \frac{q_1}{b}\right\}.$$

Giải hệ: (i) $q_1^* = BR_1(q_2^*)$, (ii) $q_2^* = BR_2(q_1^*)$, ta được PSNE duy nhất

$$q_1^* = q_2^* = \frac{a-c}{3b}.$$

Lúc này, giá thành trên thị trường sẽ là $P(q_1^*, q_2^*) = a - \frac{2}{3}(a-c) = \frac{a}{3} + \frac{2c}{3} > c$, chi phí để sản xuất thêm một sản phẩm. Vậy tại sao hai doanh nghiệp này không sản xuất nhiều hơn? Lí do là khi có thêm sản phẩm trên thị trường, giá thành phải giảm xuống. Điều này không chỉ ảnh hưởng đến lợi nhuận từ những sản phẩm được sản xuất thêm mà ảnh hưởng đến cả phần lợi nhuận có được từ các sản phẩm trước, vì chỉ có một mức giá được đặt ra cho tất cả các sản phẩm. Khi trên thị trường có ít doanh nghiệp hơn, những doanh nghiệp này có khả năng tác động lên giá thành nhiều hơn (market power) và do đó có động cơ để sản xuất ít hơn nhằm giữ giá cao hơn. Hãy thử giải bài toán cạnh tranh Cournot tượng tự như trên nhưng với n doanh nghiệp, ta sẽ thấy rằng khi số doanh nghiệp tăng lên và tiến tới vô cùng, giá thành cân bằng trong thị trường sẽ giảm dần và tiến tới chi phí bỏ ra để sản xuất thêm một sản phẩm.

<u>Trong chiến lược hỗn hợp</u>

Tương tự như trong chiến lược thuần túy, một tổ hợp chiến lược hỗn hợp $\sigma^* = (\sigma_1^*, ..., \sigma_n^*)$ được gọi là một Nash equilibrium nếu như với mỗi người chơi $i \in N$,

$$u_i(\sigma_i^*, \sigma_{-i}^*) \geq u_i(\sigma_i', \sigma_{-i}^*)$$

với mọi $\sigma_i' \in \Delta(S_i)$. Tương tự, ta có thể định nghĩa $BR : \Sigma \rightrightarrows \Sigma$ từ hàm đáp trả tối ưu của từng cá nhân. Khi đó, σ^* là một cân bằng Nash khi và chỉ khi $\sigma^* \in BR(\sigma^*)$.

Nhắc lại rằng

$$u_i(\sigma) = \sum_{s_i \in S_i} \sigma_i(s_i) u_i(s_i, \sigma_{-i}).$$

Như vậy, để $\sigma^* \in BR(\sigma^*)$, phải đảm bảo $\sigma_i^*(s_i) > 0 \implies s_i \in BR_i(\sigma_{-i})$. Nói cách khác, một chiến lược thuần túy được chơi với xác suất lớn hơn 0 chỉ khi bản thân chiến lược thuần túy đó cũng là một chiến lược tối ưu.

Hãy cùng tìm tất cả các cân bằng Nash trong trò chơi Battle of the Sexes ở ví dụ 5. Nhận xét đầu tiên là mọi cân bằng Nash trong chiến lược thuần túy cũng là cân bằng Nash trong chiến lược hỗn hợp. Thứ hai, vì $BR_1(W) = \{W\}$ nên người chơi 1 (nữ) sẽ không "strictly randomize" giữa B và W khi người chơi 2 (nam) chọn W. Lập luận tương tự để thấy rằng không thể có cân bằng Nash khi một người chơi sử dụng chiến lược thuần túy và người chơi còn lại "strictly randomize". Cuối cùng, ta giả sử cả hai người chơi cùng "strictly randomize". Gọi $p \in (0, 1)$ là xác suất mà người chơi 1 chọn W và $q \in (0, 1)$ là xác suất mà người chơi 2 chọn W. Ta có thể viết $(p, 1 - p)$ cho chiến lược hỗn hợp của người nữ và $(q, 1 - q)$ cho chiến lược hỗn hợp của người nam. Dựa vào nhận xét trên, ta phải có $W, B \in BR_1((q, 1 - q))$, có nghĩa là

$$u_1(W, (q, 1 - q)) = u_1(B, (q, 1 - q)).$$

$\text{LHS} = 3q + 0(1 - q), \text{RHS} = 0q + 1(1 - q)$ nên LHS = RHS khi và chỉ khi $q = 1/4$. Tương tự, ta phải có

$$u_2(W, (p, 1 - p)) = u_2(B, (p, 1 - p)),$$

đúng khi và chỉ khi $p = 3/4$.

Như vậy, trò chơi này có 3 NE: $(W, W), (B, B)$, và $((3/4, 1/4), (1/4, 3/4)$.

Lưu ý rằng khi chỉ xem xét các chiến lược thuần túy, giá trị (payoffs) chỉ mang tính chất tượng trưng, theo nghĩa là ta có thể thay đổi các giá trị này miễn là không làm thay đổi thứ tự mong muốn của các tổ hợp hành động đối với từng người chơi. Trong trường hợp này, ta nói "payoffs" chỉ mang tính chất "ordinal", nôm na là khi so sánh A và B ta chỉ cần biết $A > B$, hay $A < B$, hay $A = B$. Tuy nhiên, "payoffs" của các tổ hợp chiến lược thuần túy sẽ quyết định đến cân bằng Nash trong chiến lược hỗn hợp. Khi đó "payoffs" có tính chất "cardinal", nôm na là ta cần biết A lớn hơn B bao nhiêu, A gấp B bao nhiêu lần, v.v,... Để hiểu hơn về ý nghĩa của hàm giá trị, các bạn có thể tham khảo [3].

Bài tập 2 *Chiến lược áp đảo mạnh và cân bằng Nash*

Lập luận chứng minh rằng mỗi người chơi chỉ có tối đa một chiến lược áp đảo mạnh. Hơn nữa, nếu mỗi người chơi đều có một chiến lược áp đảo mạnh, thì trò chơi có một NE duy nhất, đó là mỗi người chơi sử dụng chiến lược áp đảo mạnh này. Từ đây kết luận trò chơi Prisoners' Dilemma có một NE duy nhất là cả hai người chơi cùng thú tội.

Bài tập 3 *Cân bằng Nash của trò chơi Oẳn Tù Tì*

Hãy lập ma trận thưởng phạt của trò chơi Oẳn Tù Tì trong ví dụ 3. Tìm tất cả NE của trò chơi này.

1.4 Knowledge

Liệu cân bằng Nash có thực sự tự nhiên? Điều gì sẽ xảy ra nếu trong trò chơi có nhiều cân bằng Nash?

Tưởng tượng rằng bạn đang bước đi trên một làn đường và có một người khác bước đến từ phía đối diện trên cùng làn đường đó và khoảng cách từ người đó đến bạn đã khá gần. Đã bao nhiêu lần bạn gặp phải trường hợp mà cả hai cùng tránh nhau rồi lại cùng dừng lại, nhiều lần như thế đến khi một người quyết định đứng yên còn người kia tránh sang một bên và bước tiếp. Trò chơi này tương tự như Battle of the Sexes, có hai PSNE: một là bạn đi trên làn đường của mình còn người kia tránh sang một bên, hai là bạn tránh sang một bên và người kia đi làn đường của người đó. Không có cách nào để bạn có thể chỉ dùng lý luận mà tìm ra cân bằng Nash nào sẽ được lựa chọn dựa trên những thông tin bạn có về trò chơi - gồm luật chơi và giá trị cho mỗi người chơi tương ứng với từng tổ hợp chiến lược. Cân bằng Nash cần được củng cố bởi một giả thiết, rằng: mỗi người chơi biết chính xác chiến lược của những người chơi còn lại. Giả thiết này có thực tế hay không?

Ngay cả khi trò chơi chỉ có một cân bằng Nash thì liệu bạn có chắc chắn rằng những người chơi khác sẽ làm theo đúng chiến lược đề ra trong cân bằng Nash này? Ở trên chúng ta đã giới thiệu một số trò chơi với "complete information" mà chưa giải thích về khái niệm này. "Complete information" ở đây có nghĩa là mỗi người chơi biết tất cả các thông tin về cấu trúc của trò chơi (ai là người chơi, họ có thể đi những nước đi nào) và hàm giá trị (payoff functions) của tất cả các người chơi, hơn thế nữa những thông tin này phải là kiến thức phổ thông (**common knowledge**). Hãy cùng quay lại với ví dụ về cách tính điểm mà điểm của cả lớp sẽ được tịnh tiến đến khi bạn học sinh đạt điểm cao nhất lớp được số điểm tối đa. Để bạn có thể tự tin nộp giấy trắng, bạn phải chắc chắn rằng trong tất cả những học sinh còn lại không ai là kẻ phản bội, hơn thế nữa bạn phải chắc chằng rằng không ai nghi ngờ ai là kẻ phản bội và không ai nghĩ rằng ai đó nghĩ rằng có một kẻ phản bội, v.v... Một tính chất được gọi là kiến thức chung (**mutual knowledge**) nếu tất cả người chơi biết về nó. Một tính chất được gọi là kiến thức phổ thông (**common knowledge**) nếu tất cả người chơi biết về tính chất đó, biết là tất cả mọi người cùng biết về tính chất đó và biết là tất cả mọi người cùng biết là ai cũng biết về tính chất đó, v.v,... Để dễ hình dung, hãy tưởng tượng có hai bạn đứng đối diện nhau và cùng đội mũ màu hồng. Mỗi người có thể nhìn thấy mũ của người đội diện nhưng không biết bản thân đội mũ màu gì. Khi đó "ít nhất một trong hai người đội mũ màu hồng" là "mutual knowledge" nhưng không phải là "common knowledge" đối với hai bạn này. Tưởng tượng thêm rằng hai bạn này đứng giữa lớp. Khi đó, "cả hai bạn cùng đội mũ màu hồng" là "common knowledge" của tất cả các thành viên khác trong lớp. Trong ví dụ về tịnh tiến điểm, "không có kẻ phản bội" phải là "common knowledge" thì cân bằng Nash "tất cả cùng nộp giấy trắng" mới bền vững.[4] Khác với cân bằng Nash, cân bằng có được từ chiến lược áp đảo ít đòi hỏi kiến thức của người chơi về những người cùng chơi - những người này quan tâm điều gì, họ biết gì về mình và khả năng suy luận của họ tới đâu. Kẻ bị tình nghi không cần biết liệu tòng phạm của hắn là một kẻ tính toán khôn ngoan hay ngờ nghệch, là một người bạn trung thành hay là kẻ chỉ quan tâm đến lợi ích cá nhân, hay là kẻ chỉ vì quá hoảng loạn mà sẽ thú tội hoặc quá sợ sệt mà sẽ im lặng. Hắn chỉ cần biết luật chơi là như thế, rằng bản thân hắn muốn giảm thiểu số năm tù giam, và như vậy thì hắn chắc chắn nên thú tội. Về phương diện dự đoán hành vi, chiến lược áp đảo rõ ràng đáng tin cậy hơn cân bằng Nash, tất nhiên chỉ khi nó tồn tại. Tương tự, khi ta xây dựng một cơ chế hoặc hệ thống, sẽ thật lý tưởng nếu hành vi mong muốn cũng chính là chiến lược áp đảo (mạnh/yếu) của tất cả người chơi.

2 Market design - Thiết kế thị trường

2.1 Giới thiệu

Có thể hiểu thị trường (market) là nơi các bên thực hiện những trao đổi cùng có lợi (mutually beneficial exchange). Nhiều thị trường gồm hai bên: "cung" (supply) và cầu (demand), được vận hành bởi giá cả, nghĩa là trao đổi hàng-tiền chỉ được thực hiện khi một mức giá được chấp nhận bởi cả cá thể bên cung và cá thể bên cầu. Khi

[4]Một bài toán về "common knowledge" thú vị là bài toán về những người mắt xanh trên hòn đảo lạ (the blue-eyed islanders puzzle). Một phát biểu của bài toán này có thể được tìm thấy ở https://terrytao.wordpress.com/2008/02/05/the-blue-eyed-islanders-puzzle/. Để đọc thêm về "common knowledge", các bạn có thể tham khảo [4].

người ta có thể mua bán bằng tiền và thị trường đủ dày (đông người bán và người mua), mọi việc diễn ra tương đối trôi chảy, ít nhất là về tính hiệu quả (efficiency). Thế nhưng không phải thị trường nào cũng cho phép trao đổi bằng tiền.

Một ví dụ điển hình là thị trường thận ghép (kidney exchange market). Ở nhiều quốc gia, trong đó có Mỹ và Việt Nam, luật pháp chỉ cho phép người có nhu cầu ghép thận nhận thận hiến chứ không cho phép mua thận. Điều này tương đương với việc ấn định giá thận ghép bằng "không". Trong khi đó có nhiều người sẵn sàng mua thận với giá rất cao, và cũng có nhiều người sẵn sàng bán thận để nhận số tiền tương ứng[5]. Không khó hiểu tại sao số ca ghép thận trên thực tế ít hơn nhiều mức tiềm năng.

Một khó khăn khác của ghép thận là tính tương thích của lá thận ghép với cơ thể người nhận. Mặc dù có thể không khó để tìm một người thân sẵn sàng hiến thận nhưng xác suất thận của người thân này không tương thích là cao. Giáo sư Kinh tế học Alvin Elliot Roth và những cộng sự của ông đã thiết kế lại thị trường trao đổi thận ở Mỹ, dựa trên ý tưởng khởi điểm sau. Có hai người A1 và B1 cùng cần ghép thận và họ có lần lượt người thân là A2 và B2 sẵn sàng hiến thận cho họ. Tuy nhiên thận của A2 không tương thích với A1 nhưng tương thích với B1, thận của B2 không tương thích với B1 nhưng tương thích với A1. Khi đó trao đổi sau có thể được thực hiện:

$$\begin{tikzcd} A1 & A2 \arrow[dl] \\ B1 & B2 \arrow[ul] \end{tikzcd}$$

Hình 2: Paired kidney exchange

Cho phép loại trao đổi này đã tăng lên rất nhiều khả năng tìm được thận tương thích. Nhóm nghiên cứu của Giáo sư Roth không những phát triển và hoàn thiện thêm các phương thức trao đổi thận ghép mà còn đóng góp quan trọng trong việc xây dựng ngân hàng dữ liệu lớn về những người hiến thận và người có nhu cầu nhận thận, qua đó tăng cao khả năng tìm được thận phù hợp. Quá trình này đòi hỏi những hiểu biết về đặc thù của thị trường cũng như những động cơ, tương tác chiến lược giữa các bên liên quan. Quyển sách "Who gets what - and why" của Giáo sư Roth [5] giải thích một cách thú vị và dễ hiểu những khó khăn và ý tưởng nền tảng của quá trình thiết kế thị trường trao đổi thận cũng như những vấn đề quan trọng của các thị trường khác. Hi vọng ví dụ này đã giúp bạn nhận ra rằng những nghiên cứu kinh tế không chỉ làm xã hội giàu có hơn, mà còn có thể trực tiếp cứu

[5] Một người sức khỏe tốt vẫn có thể sinh hoạt bình thường khi mất đi một bên thận.

sống nhiều mạng người.

2.2 Bài toán "kết duyên"

Vẫn còn nhiều thị trường khác mà chúng ta không thể trao đổi hoàn toàn bằng tiền. Ví dụ, bạn không thể mua một vị trí ở một công ty hoặc mua một suất học ở một trường đại học danh tiếng. Sau bài giới thiệu này chúng ta sẽ thực hiện một đề tài nhỏ về thuật toán sắp xếp học sinh vào các trường đại học dựa trên điểm thi và thứ tự nguyện vọng (**preference orderings**) của học sinh. Tất cả các cá nhân tham gia trong thị trường sẽ nộp toàn bộ nguyện vọng của mình cho một **clearing house** và clearing house sẽ dùng những thông tin này để quyết định ghép học sinh nào vào trường nào, dựa vào một thuật toán biết trước bởi tất cả người chơi. Vậy bài toán mà chúng ta sẽ xem xét khác biệt như thế nào với đề tài "Phân tuyến học sinh vào lớp 6" và bài toán "Tìm cặp ghép lớn nhất" của PIMA 2016?

- Thứ nhất, việc đánh giá tính hiệu quả của thuật toán trong bài toàn "Tìm cặp ghép lớn nhất" là dựa trên đề xuất nguyện vọng của học sinh - thế nhưng thuật toán này lại không đảm bảo tất cả học sinh sẽ nói thật về nguyện vọng của mình. Giả sử có 2 kí túc xá A, B, và bạn thích kí tú xá A hơn B, và thích ở kí túc xá B hơn phải tự tìm chỗ ở ngoài trường. Tuy nhiên kí túc xá A được ưa chuộng hơn bởi nhiều học sinh khác, có phải sẽ khôn ngoan hơn nếu bạn đề xuất kí túc xá B?

- Thứ hai, mặc dù bài toán "Phân tuyến học sinh vào lớp 6" được giải dựa trên những số liệu "khách quan" nên sẽ không gặp phải vấn đề khi đánh giá kết quả lời giải, việc bài toán này không đề cao nguyện vọng của cá nhân học sinh là một điểm yếu. Sắp xếp như vậy có thể phù hợp ở bậc học thấp nhưng chắc chắn sẽ gặp nhiều phản đối ở bậc học cao.

Qua bài toán "kết duyên", chúng ta sẽ tìm hiểu về những khái niệm căn bản trong bài toán ghép cặp (matchings) và thuật toán Gale-Shapley.[6] Thuật toán này cũng sẽ được ứng dụng trong đề tài sắp xếp học sinh vào các trường đại học.

2.2.1 Mô hình

Trong thị trường hôn nhân (**marriage market**) có tập các cá nhân nam M và tập các cá nhân nữ W. Mỗi người nam $m \in M$ có một thứ tự nguyện vọng $\succ_m$ trên $W \cup \{\emptyset\}$ và mỗi người nữ $w \in W$ có một thứ tự nguyện vọng $\succ_w$ trên $M \cup \{\emptyset\}$. Một tổ hợp nguyện vọng (**preference profile**) $\succ$ cho biết thứ tự nguyện vọng của mỗi cá nhân. Ta viết $\succ = (\succ_{m_1}, ..., \succ_{m_{|M|}}, \succ_{w_1}, ..., \succ_{w_{|W|}})$. Gọi $\mathcal{P}$ là tập hợp chứa tất cả các tổ hợp nguyện vọng ứng với (M, W).

[6] Nguồn tham khảo: [6], [7].

Ví dụ 6 *Bài toán kết duyên 2 nam - 2 nữ*

Với $M = \{m_1, m_2\}$ và $W = \{w_1, w_2\}$, một tổ hợp nguyện vọng khả thi là

$$w_1 \succ_{m_1} w_2 \succ_{m_1} \emptyset,$$

$$w_1 \succ_{m_2} \emptyset \succ_{m_2} w_2,$$

$$m_1 \succ_{w_1} m_2 \succ_{w_1} \emptyset,$$

$$m_2 \succ_{w_2} m_1 \succ_{w_2} \emptyset.$$

Khi này ta hiểu là m_1 thích w_1 hơn w_2 và thích w_2 hơn độc thân.[7]

Một cách ghép hay kết quả ghép (**matching**) là một hàm

$$\mu : M \cup W \to M \cup W \cup \{\emptyset\}$$

xác định mỗi người nam/nữ kết duyên với ai hoặc độc thân, sao cho

1. Với mỗi $m \in M$, $\mu(m) \in W \cup \{\emptyset\}$ và với mỗi $w \in W$, $\mu(w) \in M \cup \{\emptyset\}$.
2. Nếu $\mu(m) \in W$ thì $\mu(\mu(m)) = m$, và nếu $\mu(w) \in M$ thì $\mu(\mu(w)) = w$.

Kí hiệu $\mathcal{M}$ cho tập hợp tất cả các kết quả ghép khả thi.

Một thuật toán ghép cặp (**matching algorithm**) là một hàm $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ xác định một kết quả ghép cho mỗi tổ hợp nguyện vọng. Tiếp theo ta sẽ tìm hiểu về một số tính chất mong muốn của kết quả ghép và thuật toán ghép cặp.

2.3 Tính chất mong muốn

Với mỗi thứ tự nguyện vọng $\succ_i$, ta định nghĩa quan hệ (relation) $\succeq_i$ như sau: $j \succeq_i j'$ khi và chỉ khi $j \succ_i j'$ hoặc $j = j'$.[8]

Tính hiệu quả (Efficiency): Tính hiệu quả là một tính chất trọng tâm trong các bài toán kinh tế. Một kết quả ghép, phân phối, trao đổi hàng hóa, v.v,..., là không

[7] Ở đây ta quy định một người luôn biết mình thích ai hơn giữa hai người khác giới bất kì và đối với một người khác giới bất kì luôn biết mình có thích kết duyên với người đó hơn độc thân hay không. Hơn nữa, nguyện vọng của mỗi cá nhân phải đảm bảo tính "transitivity", nghĩa là nếu như ở ví dụ trên $w_1 \succ_{m_1} w_2$ và $w_2 \succ_{m_1} \emptyset$ thì đồng thời ta phải có $w_1 \succ_{m_1} \emptyset$. Cuối cùng, chúng ta ngầm hiểu là một người chỉ quan tâm mình kết duyên với ai mà không quan tâm đến sự ghép cặp của những cá nhân khác trên thị trường.

[8] Ở đây ta ngầm giả định là giữa hai đối tượng ghép khác nhau, một người sẽ không bao giờ "indifferent".

hiệu quả (inefficient) nếu như có cách nào đó giúp ích cho một người mà không làm hại đến bất kì người nào khác.

Ví dụ 7 *Trao đổi hàng - tiền*

Một người muốn mua một sản phẩm và giá trị của nó với người đó là 50.000 đồng, còn đối với người bán thì giá trị của sản phẩm đó là 30.000 đồng. Kết quả mà hai người này không trao đổi là không hiệu quả vì mọi giao dịch thực hiện với giá bán từ 30.000 đến 50.000 đồng sẽ làm cho ít nhất một người được lợi mà không gây thiệt hại cho người kia. Những cách trao đổi này được gọi là những "Pareto improvements".

Trong bài toán "kết duyên", một kết quả ghép $\mu \in \mathcal{M}$ là hiệu quả (**efficient**) nếu như không tồn tại một kết quả ghép $\mu' \in \mathcal{M}\backslash\{\mu\}$ sao cho với mọi $i \in M \cup W$, $\mu'(i) \succeq_i \mu(i)$. Vì $\mu' \neq \mu$, nghĩa là tồn tại i' sao cho $\mu'(i) \neq \mu(i)$, nên $\mu'(i') \succeq_{i'} \mu(i')$ kéo theo $\mu'(i) \succ_i \mu(i)$. Một thuật toán ghép cặp φ được gọi là hiệu quả nếu như với mọi tổ hợp nguyện vọng $\succ \in \mathcal{P}$, $\mu = \varphi(\succ)$ hiệu quả theo $\succ$.

Tính bền vững (Stability): Trong bài toán "kết duyên", một kết quả ghép $\mu \in \mathcal{M}$ bị chặn (**blocked**) bởi một cặp nam, nữ (m, w) nếu như

$$w \succ_m \mu(m) \quad \text{và} \quad m \succ_w \mu(w).$$

Kết quả ghép μ bị chặn bởi m nếu như $\emptyset \succ_m \mu(m)$ và bị chặn bởi w nếu như $\emptyset \succ_w \mu(w)$. Một kết quả ghép là bền vững (**stable**) nếu nó không bị chặn bởi hai người nam nữ nào hay một cá nhân nam hoặc nữ nào. Trong ngữ cảnh này, một kết quả ghép cặp là bền vững nếu như sau đó không có đôi nam nữ nào sẽ li dị và cũng không có đôi độc thân nào muốn kết duyên với nhau. Tính bền vững được nhận định là tính chất mấu chốt cho sự vận hành và duy trì của những hệ thống phân phối tập trung. Ta gọi một thuật toán ghép đôi là bền vững nếu như từng kết quả ghép bền vững theo tổ hợp nguyện vọng tương ứng.

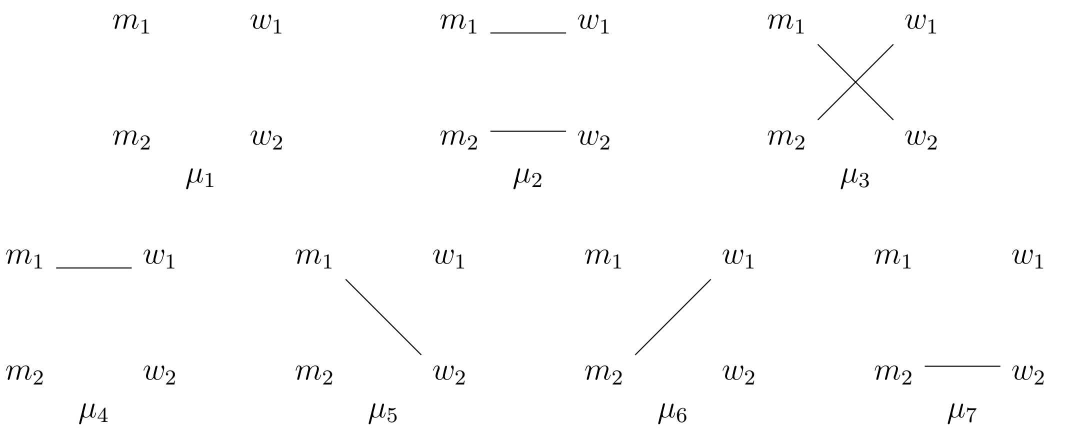
Hãy cùng tìm ra những kết quả ghép bền vững trong bài toán kết duyên ở ví dụ 6, với tổ hợp thứ tự nguyện vọng $\succ$ sau

$m_1 : w_1, w_2, \emptyset$

$m_2 : w_1, \emptyset, w_2$

$w_1 : m_1, m_2, \emptyset$

$w_2 : m_2, m_1, \emptyset$



Hình 3: Tất cả các cặp ghép khả thi trong bài toán 2 nam - 2 nữ

Viết $\mu \to \mu'$ để chỉ μ bị chặn bởi μ' và đặt tên các cặp ghép khả thi như trong hình 3. Ta có: $\mu_1 \to \mu_4/\mu_5/\mu_6$ vì cả m_1 và w_1 thích nhau hơn là độc thân/cả m_1 và w_2 thích nhau hơn độc thân/cả m_2 và w_1 thích nhau hơn độc thân, $\mu_2 \to \mu_4$ vì m_2 thà độc thân còn hơn lấy w_2, $\mu_3 \to \mu_4$ vì cả m_1 và w_1 thích người kia hơn vợ/chồng hiện tại của mình, $\mu_5 \to \mu_4/\mu_3$, $\mu_6 \to \mu_4/\mu_3$, $\mu_7 \to \mu_1/\mu_2/\mu_6$, μ_4 là kết quả ghép bền vững duy nhất.

Tính "không tồn tại động cơ nói dối" (Strategy-proofness): Một thuật toán được gọi là **strategy-proof** nếu như không bất kì cá nhân nào có động cơ để nói dối về thứ tự nguyện vọng của mình, bất kể thứ tự nguyện vọng của những người còn lại. Tương tự như khi kí hiệu tổ hợp chiến lược đối thủ, ta viết $\succ_{-i} = (\succ_1, ..., \succ_{i-1}, \succ_{i+1}, ..., \succ_n)$ để kí hiệu tổ hợp thứ tự nguyện vọng được đề xuất bởi những cá nhân khác i trong thị trường.

Một thuật toán $\varphi : \mathcal{P} \to \mathcal{M}$ được gọi là **strategy-proof** nếu như với mọi $i \in M \cup W$, mọi thứ tự nguyện vọng thật $\succ_i$ và mọi đề xuất thứ tự nguyện vọng $\succ'_i$ của i,

$$\varphi(\succ_i, \succ_{-i}) \succeq_i \varphi(\succ'_i, \succ_{-i})$$

cho mọi $\succ_{-i}$ được đề xuất bởi những người chơi còn lại.

Ví dụ 8 *Bầu cử với 2 ứng viên (tham khảo thêm ở [8])*

Các trại viên của kì trại PIMA 2017 thực hiện cuộc bầu chọn cho hằng số yêu thích, với hai ứng viên là số Pi và số Euler. Mỗi trại viên bầu chọn cho một trong hai hằng số. Hằng số nhận được nhiều phiếu bầu nhất giành chiến thắng, và mỗi trại viên sẽ viết một bài ngắn đăng trên Facebook về hằng số này. Nếu số phiếu bầu cho hai hằng số này là bằng nhau, kết quả sẽ được quyết định bằng cách tung đồng xu. Cách bầu cử như thế này đảm bảo không trại viên nào có động cơ để bầu chọn cho hằng số khác hằng số yêu thích của mình, bất kể phiếu bầu của những trại viên khác. Ví dụ như có tất cả 27 trại viên. Ta cùng xem xét xem bạn Uyên nên bầu như thế nào. Nếu như trong 26 người còn lại 13 người bầu cho số Pi và 13 người bầu cho số Euler thì số Pi sẽ thắng nếu Uyên bầu cho số Pi và số Euler sẽ thắng nếu Uyên bầu cho số Euler. Nếu trong 26 phiếu bầu này có ≥ 12 hoặc ≤ 14 phiếu bầu cho Pi, thì phiếu của Uyên không thay đổi được kết quả, nhưng Uyên cũng không thể làm tốt hơn là bầu cho số yêu thích của mình. Như vậy, cơ chế bầu cử này "strategy-proof".

Tương tự, hãy hình dung trò chơi mà các cá nhân trong thị trường cùng nộp đồng thời nguyện vọng hoàn chỉnh của họ cho clearing house. Dựa vào những đề xuất nguyện vọng này, clearing house quyết định kết quả ghép cặp cuối cùng dựa trên thuật toán φ được biết trước bởi tất cả các người chơi. Như vậy, yêu cầu φ strategy-proof cũng tương tự yêu cầu nói thật về nguyện vọng của mình là chiến lược áp đảo.

Lưu ý rằng một thị trường tập trung rất nhiều người chơi nên giả định người chơi biết nguyện vọng thật sự của tất cả người chơi còn lại là không thực tế. Hơn nữa, trò chơi mà người chơi không cần tính toán chiến lược hay thu thập thông tin về những người chơi khác là dễ chơi hơn, tiết kiệm được nhiều thời gian và công sức. Do đó tính "strategy-proofness" rất quan trọng trong thiết kế thị trường (market design). Trong nhiều trường hợp, những dữ liệu thu thập được còn hữu ích cho các nghiên cứu khác.

2.4 Thuật toán Gale-Shapley

2.4.1 Mô tả

Thuật toán Gale-Shapley mà bên nam ngỏ lời (men-proposing deferred acceptance algorithm) được mô tả như sau:

1. Ở bước đầu, mỗi người nam ngỏ lời với người nữ đứng đầu thứ tự nguyện vọng của mình, trừ khi "độc thân" được xếp trên nhất.

2. Mỗi người nữ sẽ giữ lại lời ngỏ từ người mà cô ấy thích nhất và thích hơn "độc thân" trong những người ngỏ lời với cô ấy ở bước trước, và từ chối tất cả những người còn lại.

3. Những người nam bị từ chối sẽ ngỏ lời với người họ thích nhất trong những người chưa từng từ chối họ và vẫn tốt hơn "độc thân" đối với họ.

4. Các bước "ngỏ lời" và "từ chối" lặp đi lặp lại cho đến khi mỗi người nam hoặc là bị từ chối bởi tất cả những người phụ nữ mà anh ta thích hơn "độc thân"

hoặc có một lời ngỏ chưa bị từ chối, và mỗi người nữ giữ không quá một lời ngỏ. Khi này mỗi lời ngỏ chưa bị từ chối trở thành một cặp ghép, và những người khác chính thức độc thân.

Bây giờ chúng ta sẽ thử chuyển những mô tả này sang ngôn ngữ thuận tiện cho việc lập trình. Mỗi thứ tự nguyện vọng $\succ_m$ của một người nam $m \in M$ có thể được biểu diễn bởi một dãy (array) dài $|W| + 1$. Trong ví dụ 6, nguyện vọng hoàn chỉnh của m_2 có thể được biểu diễn bằng dãy $a(m_2) = (w_1, 0, w_2)$. Với mỗi dãy $a(m)$, ta viết $a(m, k)$ để chỉ phần tử thứ k của dãy. Tương tự, mỗi thứ tự nguyện vọng của một người nữ w có thể được biểu diển bởi một dãy $b(w)$ dài $|M| + 1$.

Để biểu diễn các kết quả ghép tạm thời, ta sử dụng ma trận g có kích thước $(|M|+1) \times (|W|+1)$, với: $g(i, j)$ nhận giá trị bằng "1" hoặc "0" cho mỗi $i \in M \cup \{0\}$ và $j \in W \cup \{0\}$; $g(m, w) = 1$ có nghĩa là m được ghép với w; $g(m, 0) = 1$ nếu m độc thân và $g(0, w) = 1$ nếu w độc thân. Ma trận kết quả ghép cuối cùng (xuất) phải thỏa mãn rằng với mọi $m \in M$,

$$\sum_{w \in W} g(m, w) + g(m, 0) = 1$$

và với mọi $w \in W$,

$$\sum_{m \in M} g(m, w) + g(0, w) = 1.$$

Để theo dõi lời ngỏ của bên nam, ta dùng dãy K dài $|M|$, trong đó $K(m) = k \leq |W| + 1$ có nghĩa là m có một lời ngỏ chưa bị từ chối và lời ngỏ này được giữ bởi $a(m, k)$ (nếu $a(m, k) \neq 0$).

input: tập người nam, tập người nữ, bảng a thứ tự nguyện vọng của tất cả người nam, và bảng b thứ tự nguyện vọng của tất cả người nữ
output: ma trận cặp ghép g biểu diễn người nam nào được ghép với người nữ nào và ai độc thân

1. cho g là một ma trận toàn 0 có kích thước $(|M| + 1) \times (|W| + 1)$
2. cho K là một dãy toàn 0 có chiều dài $|M|$
3. cho $\bar{K}$ là một dãy toàn 1 có chiều dài $|M|$
4. **while** $K \neq \bar{K}$ **do**
5. gán $K := \bar{K}$
6. **for** mỗi $m \in M$ **do**

7. gán $g(m, a(m, K(m))) := 1$
8. **end for**
9. **for** mỗi $w \in W$ **do**
10. **if** $\{m \in M : g(m, w) = 1\} \neq \varnothing$ **then**
    (a) chọn phần tử m^* tốt nhất trong tập này chiếu theo dãy $b(w)$
    (b) **for** mỗi $m \in M \backslash \{m^*\}$ thỏa $g(m, w) = 1$ **then**
    (c) gán $g(m, w) := 0$
    (d) gán $\bar{K}(m) := K(m) + 1$
    (e) **end for**
    (f) **if** 0 xếp trước m^* theo $b(w)$ **then**
    (g) gán $g(m^*, w) := 0$
    (h) gán $g(0, w) = 1$
    (i) gán $\bar{K}(m^*) := K(m^*) + 1$
    (j) **else** gán $g(0, w) := 0$
11. **else** gán $g(0, w) := 1$
12. **end for**
13. **end while**
14. return g

Thuật toán Gale-Shapley mà nữ ngỏ lời được mô tả tương tự, với vai trò của bên nữ và bên nam hoán đổi cho nhau.

2.4.2 Kết quả quan trọng

Kí hiệu φ^m cho thuật toán Gale-Shapley mà nam ngỏ lời và φ^w cho thuật toán Gale-Shapley mà nữ ngỏ lời.

Định lý 1 ([6, 7]) φ^m và φ^w là các thuật toán bền vững.

Nói cách khác, với mọi $\succ \in \mathcal{P}$, $\varphi^m(\succ)$ và $\varphi^w(\succ)$ đều là các kết quả ghép bền vững theo $\succ$ (dù hai kết quả ghép này có thể khác nhau).

Định lý 2 ([6]) Thuật toán Gale Shapley cho kết quả bền vững tốt nhất cho bên ngỏ lời.

Chính xác hơn, giả sử ta cố định một tổ hợp thứ tự nguyện vọng $\succ \in \mathcal{P}$. Khi đó $\mu = \varphi^m(\succ)$ thỏa mãn rằng cho mọi cách ghép μ' bền vững theo $\succ$, $\mu(m) \succeq_m \mu'(m)$ với mọi $m \in M$. Tương tự với φ^w.

Ví dụ 9 *Hãy cùng thực hiện thuật toán φ^m và φ^w trên tổ hợp nguyện vọng $\succ$ được biểu diễn như sau:*

$a(m_1) = (w_1, w_2, 0)$

$a(m_2) = (w_2, w_1, 0)$

$b(w_1) = (m_2, m_1, 0)$

$b(w_2) = (m_1, m_2, 0)$

Nếu ta sử dụng thuật toán φ^m

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\bar{K}=(1,1)]{6.1} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{10.1} & \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
g = g_0 & & m_1 \to w_1 & & w_1 \text{ accepts } m_1 \\
 & & m_2 \to w_2 & & w_2 \text{ accepts } m_2
\end{array}
$$

w_1 chỉ nhận được một lời ngỏ và lời ngỏ này tốt hơn "độc thân" nên w_1 đồng ý. Tương tự, w_2 cũng đồng ý lời ngỏ duy nhất mà mình nhận được. Vì cả hai người nam đều không bị từ chối, sau bước này $\bar{K} = (1,1)$, không đổi. Thuật toán dừng. Kết quả ghép là $(m_1, w_1) - (m_2, w_2)$.

Ở đây các bước trong thuật toán tương ứng được kí hiệu bằng bộ số viết trên dấu mũi tên. Số ở trước dấu chấm kí hiệu bước thực hiện, số ở sau dấu chấm kí hiệu vòng lặp theo "while". Ta sử dụng kí hiệu tương tự cho thuật toán φ^w với dấu phết để phân biệt rằng vai trò của nam và nữ đã được hoán đổi cho nhau, nhưng giữ nguyên định nghĩa ma trận kết quả g.

Nếu ta sử dụng thuật toán φ^w

$$
\begin{array}{ccccc}
\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow[\bar{K}'=(1,1)]{6.1'} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \xrightarrow{10.1} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
g = g_0 & & w_1 \to m_2 & & m_1 \text{ accepts } w_2 \\
 & & w_1 \to m_1 & & m_2 \text{ accepts } w_1
\end{array}
$$

Kết quả ghép là $(m_1, w_2) - (m_2, w_1)$.

Vì trong ví dụ này cả hai người nam là "chấp nhận được" (acceptable) đối với cả hai người nữ và ngược lại, một kết quả ghép bền vững phải thỏa mãn là không có ai độc thân. Kết quả $(m_1, w_1) - (m_2, w_2)$ hiển nhiên không thể bị chặn bởi một cá nhân nào, và cũng không thể bị chặn bởi một cặp nam-nữ vì cả m_1 và m_2 đang được ghép với người nữ mình thích nhất. Tương tự, $(m_1, w_2) - (m_2, w_1)$ cũng bền vững, người nữ được ghép với người nam mình thích nhất. Như vậy, đây là hai kết quả ghép bền vững duy nhất của bài toán này, và kết quả ghép sẽ có lợi hẳn cho bên ngỏ lời trong thuật toán tương ứng.[9]

Định lý 3 ([7]) Không có thuật toán nào vừa bền vững vừa "strategy-proof".

Kết quả này bắt nguồn từ sự "mâu thuẫn" trong lợi ích của nam và nữ. Như ta đã thấy ở ví dụ 9, khi tổ hợp nguyện vọng là $\succ$ thì kết quả ghép sẽ là $(m_1, w_1) - (m_2, w_2)$ nếu sử dụng φ^m và là $(m_1, w_2) - (m_2, w_1)$ nếu sử dụng φ^w. Bây giờ giả sử ta vẫn dùng thuật toán φ^m nhưng w_1 quyết định nói dối và đề xuất thứ tự nguyện vọng $b'(w_1) = (m_2, 0, m_1)$. Khi sử dụng thuật toán φ^m trên thứ tự nguyện vọng

$a(m_1) = (w_1, w_2, 0)$

$a(m_2) = (w_2, w_1, 0)$

$b'(w_1) = (m_2, 0, m_1)$

$b(w_2) = (m_1, m_2, 0)$

ma trận kết quả thay đổi như sau[10]

$$\underset{g = g_0}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow[\bar{K}=(1,1)]{6.1} \underset{\substack{m_1 \to w_1 \\ m_2 \to w_2}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{10.1} \underset{\substack{w_1 \text{ rejects } m_1 \\ w_2 \text{ accepts } m_2}}{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

$$\xrightarrow[\bar{K}=(2,1)]{6.2} \underset{\substack{m_1 \to w_2 \\ m_2 \to w_2}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}} \xrightarrow{10.2} \underset{\substack{w_1 \text{ no proposal} \\ w_2 \text{ accepts } m_1}}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

[9] Lưu ý, một bài toán có thể có hơn hai kết quả ghép bền vững. Kết quả ghép từ φ^m và φ^w cũng có thể trùng nhau, tùy thuộc vào danh sách nguyện vọng. Ví dụ như khi $|M| = |W|$ và m_j thích w_j nhất và w_j thích m_j nhất cho mỗi j, thì kết quả ghép bền vững duy nhất là m_j ghép với w_j cho từng j.

[10] Những lời ngỏ mới được tô màu xanh dương nhạt.

$$\xrightarrow[\bar{K}=(2,2)]{6.3} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{10.2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$m_1 \to w_2$ $\quad$ w_1 accepts m_2

$m_2 \to w_1$ $\quad$ w_2 accepts m_1

Lúc này kết quả ghép là $(m_1, w_2) - (m_2, w_1)$, tốt hơn cho w_1 theo thứ tự nguyện vọng thật $b(w_1)$. Điều này có nghĩa là w_1 có động cơ nói dối. Lưu ý rằng w_1 thuộc bên nhận lời ngỏ.

Định lý 4 ([7]) Nếu thuật toán Gale-Shapley được sử dụng, không cá nhân nào ở bên ngỏ lời có động cơ nói dối.

Nói rõ hơn, giả sử ta sử dụng φ^m. Khi đó với mọi $m \in M$ và mọi $\succ_m$,

$$\varphi(\succ_m, \succ_{-m}) \succeq_m \varphi(\succ'_m, \succ_{-m})$$

với mọi đề xuất cá nhân $\succ'_m$ và mọi tổ hợp thứ tự nguyện vọng $\succ_{-m}$ được đề xuất bởi những cá nhân nam và nữ khác.

Bài tập 4 *Kiểm tra thuật toán*

Theo dõi vector $\bar{K}$ và ma trận g khi chạy thuật toán φ^m trên bài toán kết duyên 1 nam và 2 nữ với thứ tự nguyện vọng sau:

$a(m_1) = (w_1, w_2, 0)$

$b(w_1) = (0, m_1)$

$b(w_2) = (m_1, 0)$.

Chỉ ra mối liên hệ giữa vector $\bar{K}$ cuối cùng và ma trận g được xuất ra. Nếu có thể, viết một chương trình nhỏ để giải một bài toán 3 nam - 3 nữ.

Nhiều các kết quả liên quan đến bài toán ghép cặp có thể được chứng minh khá ngắn gọn nhờ vào cấu trúc "lattice" đặc thù của bài toán đó. Nếu hứng thú, các bạn có thể tham khảo [9], [10] cho bài toán one-to-one matchings và [11] hoặc [12] cho bài toán many-to-one matchings.

Khi chúng ta quan tâm đến cả hai bên trong thị trường, thuật toán Gale Shapley đảm bảo tính bền vững, và do đó cũng đảm bảo tính hiệu quả. Tuy nhiên, nó "thiên vị" một bên trong thị trường, và chỉ đảm bảo động cơ "nói thật" cho bên được thiên vị. Mặt khác nếu chúng ta giả sử biết rõ động cơ của một bên (B) và quan tâm đến lợi ích của bên còn lại (A), thì thuật toán Gale-Shapley mà bên A ngỏ lời đảm bảo tính "strategy-proofness" và đem lại nhiều lợi ích cho bên A. Mặc dù thuật toán Gale-Shapley được xây dựng để ghép một cá thể với một cá thể (one-to-one matching), thuật toán này có thể được áp dụng cho những bài toán ghép một cá thể với nhiều cá thể (many-to-one matching) hoặc nhiều cá thể với nhiều cá thể (many-to-many matching) dưới những giả định phù hợp về nguyện vọng (preferences) của các bên. Một ví dụ của bài toán ghép nhiều cá thể với một cả thể là bài toán tuyển sinh.

2.5 Từ bài toán kết duyên đến bài toán tuyển sinh

2.5.1 Đặt vấn đề

Có một tập S học sinh và tập C các trường đại học. Mỗi trường đại học $c \in C$ có một chỉ tiêu tuyển sinh giới hạn q_c. Mỗi học sinh $s \in S$ có một thứ tự nguyện vọng $\succ_s$ trên các trường học. Mỗi trường $c \in C$ có một thứ tự ưu tiên P_c trên các học sinh ($S \cup \{\emptyset\}$) và một thứ tự nguyện vọng $\succ_c$ trên các nhóm học sinh (2^S) với $\succ_c$ thỏa mãn các điều sau:

1. cho $S' \subseteq S$ mà $|S'| < q_c$, ta có $S' \cup \{s_1\} \succ_c S' \cup \{s_2\}$ với mọi $s_1, s_2 \in S'$ mà $s_1\, P_c\, s_2$;

2. cho $S' \subseteq S$ mà $|S'| < q_c$, ta có $S' \cup \{s\} \succ_c S'$ với mọi $s \in S \backslash S'$ mà $s\, P_c\, \emptyset$.

Thứ tự nguyện vọng $\succ_c$ như trên được gọi là **responsive** (đối với thứ tự ưu tiên P_c). Giả sử $S = \{s_1, s_2, s_3, s_4\}$, $C = \{c\}$ với $q_c = 2$, và $s_1\, P_c\, s_2 P_c\, s_3\, P_c\, \emptyset\, P_c\, s_4$, có nghĩa là trường c thích học sinh s_1 hơn s_2 hơn s_3 và không chấp nhận s_4. Khi đó $\succ_c$ phải thỏa mãn

$$\{s_1, s_2\} \succ_c \{s_1, s_3\} \succ_c \{s_2, s_3\}$$
$$\{s_1, s_2\} \succ_c \{s_1\} \succ_c \{s_2\} \succ_c \varnothing$$
$$\{s_1, s_3\} \succ_c \{s_1\} \succ_c \{s_3\} \succ_c \varnothing$$
$$\{s_2, s_3\} \succ_c \{s_2\} \succ_c \{s_3\} \succ_c \varnothing$$

Hãy thiết kế một hệ thống phân phối học sinh vào các trường đại học, sao cho

1. Mỗi học sinh chỉ được học một trường duy nhất.

2. Mỗi trường không được nhận học sinh quá chỉ tiêu đã đề ra cũng như không được thay đổi tiêu chí tuyển sinh, ví dụ như tổ hợp môn để tính điểm hay cách tính điểm ưu tiên vùng.

3. Sau các kì thi chung và riêng, học sinh gửi đề xuất nguyện vọng đến một clearing house. Cơ quan này sẽ sử dụng một thuật toán biết trước phân phối

học sinh vào các trường dựa vào những đề xuất nguyện vọng của học sinh và các tiêu chí đã được thông báo trước đó của các trường đại học.

Một kết quả ghép khả thi là một hàm $\mu : C \cup S \to 2^S \cup C \cup \{\emptyset\}$ sao cho với mọi $c \in C$ và $s \in S$,

1. $\mu(c) \subseteq S$ và $\mu(s) \in C \cup \{\emptyset\}$,
2. $s \in \mu(c)$ khi và chỉ khi $\mu(s) = c$.

2.5.2 Liên hệ hai bài toán

Ta sẽ đưa bài toán tuyển sinh về bài toán kết duyên bằng cách tách mỗi trường đại học $c_j \in C$ thành các suất học $c_{j,1}, c_{j,2}, ..., c_{j,q_{c_j}}$. Gọi W là tập tất cả các suất học ở tất cả các trường. Mở rộng thứ tự nguyện vọng $\succ_s$ trên các trường của mỗi học sinh s thành thứ tự nguyện vọng R_s trên các suất học trong W dưới điều kiện sau:

$$c_j \succ_s c_{j'} \implies c_{j,1}\, R_s ... R_s\, c_{j,q_{c_j}}\, R_s ... R_s\, c_{j',1}\, R_s ... R_s\, c_{j',q_{c_{j'}}}, \tag{1}$$
$$c_j \succ_s \emptyset \implies c_{j,1}\, R_s ... R_s\, c_{j,q_{c_j}}\, R_s\, \emptyset, \tag{2}$$
$$\emptyset \succ_s c_j \implies \emptyset\, R_s ... c_{j,1}\, R_s ... R_s\, c_{j,q_{c_j}}. \tag{3}$$

Thứ tự ưu tiên của mỗi suất học $c_{j,k}$ với $j = 1, ..., |C|$ và $k = 1, ..., q_{c_j}$ là một "preference ordering" $P_{c_{j,k}} = P_{c_j}$ trên các học sinh. Đặt $M = S$. Khi đó $((R_s)_{s \in M}, (P_{c_{j,k}})_{c_{j,k} \in W})$ là một tổ hợp nguyện vọng của bài toán kết duyên (M, W).

Kết quả ghép μ của bài toán tuyển sinh liên hệ với kết quả ghép ν của bài toán kết duyên tương ứng như sau:

1. với mọi $s \in S$, $\mu(s) = c_j$ khi và chỉ khi $\nu(s) \in \{c_{j,1}, ..., c_{j,q_{c_j}}\}$,
2. với mọi $c_j \in C$, $\mu(c_j) = \{\mu(c_{j,k}) : \mu(c_{j,k}) \neq \emptyset, k \leq q_{c_j}\}$.

Sử dụng thuật toán φ^m với bài toán này đảm bảo các học sinh đề xuất thứ tự nguyện vọng thật sự của mình và các kết quả ghép bền vững, với tính bền vững được định nghĩa như sau.

Một mình s **chặn** μ nếu như $\emptyset \succ_s \mu(s)$. Một mình c chặn μ nếu như tồn tại $s \in \mu(c)$ sao cho $\emptyset\, P_c\, s$. Một cặp (c, s) chặn μ nếu như một trong hai trường hợp sau xảy ra: (i) $c \succ_s \mu(s)$ và $s\, P_c\, s'$ cho một học sinh $s' \in \mu(c)$ nào đó; (ii) $c \succ_s \mu(s)$ và $s\, P_c\, \emptyset$ và $|\mu(c)| < q_c$. Kết quả ghép không bị chặn bởi bất kì cách nào ở trên thì **bền vững**. Trong ngữ cảnh mà học sinh được ưu tiên dựa trên điểm thi đầu vào, tính bền vững có thể được hiểu như tính **công bằng** (fairness). Giả sử μ là kết quả ghép từ thuật toán φ^m, sẽ không tồn tại học sinh s_1 muốn vào trường c mà không được nhận khi s_1 đạt điểm cao hơn bạn học sinh có điểm thấp nhất được nhận vào c.

Lưu ý rằng mặc dù thuật toán Gale-Shapley đảm bảo tính hiệu quả khi xem xét cả hai bên trên thị trường (two-sided efficiency), nó không đảm bảo luôn cho ra kết quả ghép hiệu quả nhất cho một bên trên thị trường (one-sided efficiency), ví dụ như phía học sinh. Trong bài toán sắp xếp học sinh vào trường học (school choice problems), ngoài thuật toán Gale-Shapley được sử dụng phổ biến, còn có thuật toán Top Trading Cycles - thuật toán này "strategy-proof" và hiệu quả hơn (về phía học sinh) so với thuật toán Gale-Shapley nhưng không công bằng tuyệt đối. Để tìm hiểu thêm về cách hai thuật toán này được ứng dụng trong các bài toán "school choice" ở Mỹ, các bạn có thể tham khảo [13]. Bài viết [14] chỉ ra bản chất của hệ thống tuyển sinh cũ ở Thổ Nhĩ Kỳ là college-proposing Gale-Shapley và chỉ ra nhược điểm của thuật toán này. Dựa trên những điều kiện cơ bản, như kết quả tuyển sinh dựa trên điểm thi đầu vào, bài viết đưa ra một thiết kế hệ thống tuyển sinh mới dùng thuật toán student-proposing Gale-Shapley. Bài viết này là một điểm tham khảo rất tốt cho đề tài sắp xếp học sinh vào các trường ở Việt Nam, về cách tiếp cận đề tài, phân tích cơ chế tuyển sinh hiện tại và thiết kế cơ chế mới.

2.5.3 Câu hỏi mở

Có rất nhiều khía cạnh của bài toán tuyển sinh có thể được tìm hiểu và khai thác thêm.

1. Ở Việt Nam có rất nhiều trường đại học nên việc sắp xếp thứ tự của toàn bộ các trường này có thể khá phiền phức.[11] Ngược lại, nếu mỗi học sinh chỉ được cho phép nộp vào một trường thì mỗi học sinh sẽ phải suy tính rất nhiều: có bao nhiêu bạn được ưu tiên hơn mình ở các trường, các bạn này thích trường nào, xác suất mà mỗi trường hợp này xảy ra là bao nhiêu. Rất dễ hiểu nếu có học sinh "đáng ra đã được nhận vào một trường tốt hơn", hoặc "mặc dù điểm khá cao nhưng rớt đại học", trong trường hợp học sinh được cho phép đề xuất quá ít nguyện vọng. Giả sử quy định mỗi học sinh không được liệt kê quá Q trường. Vậy Q bao nhiêu là "đủ tốt"?

2. Những giả định về không gian nguyện vọng của các trường đại học và các bạn học sinh có phản ánh đúng thực tế không? Ví dụ một bạn học sinh thường không chỉ quan tâm đến trường đại học mình sẽ học mà còn quan tâm đến việc ai sẽ cùng học với mình. Những trường đại học cũng có thể sẽ quan tâm

[11] Tất nhiên là nếu thuật toán student-proposing Gale-Shapley được sử dụng thì mỗi học sinh chỉ cần đề xuất những trường học bản thân thích hơn là "không đi học".

đến phân bổ trình độ và cân bằng giới tính của lớp học, địa bàn cư trú hoặc gia cảnh của học sinh, hay các giải thưởng học thuật và thể thao của họ. Làm thế nào để đưa những yếu tố này vào thuật toán?

3. Tính chất nào của thuật toán là quan trọng đối với bài toán mà chúng ta xem xét? Những giả định nào trên không gian nguyện vọng là thiết yếu để thuật toán đề ra đạt được những tính chất này? Trong không gian nào thì thuật toán như thế không tồn tại?

4. Cuối cùng, giả sử những giả định về không gian nguyện vọng của chúng ta là chính xác, và lúc này bạn đã có trong tay dữ liệu về thứ tự nguyện vọng thật sự của các bạn học sinh (nhờ sử dụng thuật toán student-proposing Gale-Shapley), số liệu thống kê nào nên quan tâm?

2.5.4 Lời kết

Sự sắp xếp lại một thị trường thường bắt nguồn bằng việc phát hiện ra những bất cập của thị trường đó. Như khi chúng ta thiết kế lại cơ chế tuyển sinh của Việt Nam, bước đầu tiên là tìm hiểu rõ phương thức hoạt động của cơ chế hiện thời và đánh giá nó. Tiếp đó là xác định những tính chất mong muốn và thiết kế một cơ chế đạt được những tính chất này.

Đối với thiết kế thị trường, những đặc tính riêng của thị trường đóng vai trò rất quan trọng. Ví dụ như trong thị trường việc làm (labor market), giá trị của một ứng viên có thể thay đổi tùy thuộc vào việc nhận hay không nhận một ứng viên khác. Ví dụ như có nhà tuyển dụng cần tuyển nhân viên chụp hình và viết lách và có ba ứng viên w_1, w_2, w_3 lần lượt chỉ biết chụp hình và chụp giỏi, chỉ biết viết lách và viết giỏi, biết cả hai kĩ năng này ở mức khá. Nhà tuyển dụng này sẽ chọn w_3 nếu như chỉ được chọn một ứng viên, và chọn cả w_1 và w_2 nếu như được chọn hai ứng viên. Hãy nghĩ xem tại sao trong trường hợp này thuật toán Gale-Shapley không vận hành tốt nữa.

Xem xét một ví dụ khác: Coca-Cola và Pepsi cùng tìm người nổi tiếng đại diện cho thương hiệu của mình. Vì hai hãng này trực tiếp cạnh tranh với nhau, mỗi hãng có động cơ để hại đối thủ bằng cách kí hợp đồng với nhân vật phù hợp nhất với đối thủ, ngay cả khi nhân vật này không hoàn toàn phù hợp với hãng của mình.

Tuy vậy, giữa các thị trường vẫn chia sẻ nhiều điểm chung, và do đó hiểu biết về một thị trường sẽ giúp ích cho việc thiết kế những thị trường khác. Điển hình là mối liên hệ chặt chẽ giữa bài toán kết duyên và bài toán tuyển sinh giới thiệu ở trên.

Tài liệu

[1] Prisoners' dilemma. `https://en.wikipedia.org/wiki/Prisoner\%27s_dilemma`. Accessed: 2017-06-22.

[2] Cournot competition. `https://en.wikipedia.org/wiki/Cournot_competition`. Accessed: 2017-06-22.

[3] Katie Steele and H. Orri Stefánsson. Decision theory. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, winter 2016 edition, 2016.

[4] Peter Vanderschraaf and Giacomo Sillari. Common knowledge. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, spring 2014 edition, 2014.

[5] Alvin E Roth. *Who Gets What—and Why: The New Economics of Matchmaking and Market Design*. Houghton Mifflin Harcourt, 2015.

[6] David Gale and Lloyd S Shapley. College admissions and the stability of marriage. *The American Mathematical Monthly*, 69(1):9–15, 1962.

[7] Alvin E Roth. The economics of matching: Stability and incentives. *Mathematics of operations research*, 7(4):617–628, 1982.

[8] Eric Pacuit. Voting methods. In Edward N. Zalta, editor, *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Metaphysics Research Lab, Stanford University, fall 2017 edition, 2017.

[9] DE Knuth. Marriages stable. université de montréal press, translated as "stable marriage and its relation to other combinatorial problems,". *CRM Proceedings and Lecture Notes, American Mathematical Society*, 1976.

[10] Charles Blair. The lattice structure of the set of stable matchings with multiple partners. *Mathematics of operations research*, 13(4):619–628, 1988.

[11] Federico Echenique and Jorge Oviedo. Core many-to-one matchings by fixed-point methods. *Journal of Economic Theory*, 115(2):358–376, 2004.

[12] Federico Echenique and Bumin Yenmez. A solution to matching with preferences over colleagues. *Games and Economic Behavior*, 59(1):46–71, 2007.

[13] Atila Abdulkadiroglu and Tayfun Sönmez. School choice: A mechanism design approach. *The American Economic Review*, 93(3):729–747, 2003.

[14] Michel Balinski and Tayfun Sönmez. A tale of two mechanisms: student placement. *Journal of Economic theory*, 84(1):73–94, 1999.