PHƯƠNG TRÌNH VI PHÂN

< Vũ Lê Thế Anh >

Phương trình vi phân là bất kì phương trình nào có chứa một hàm chưa biết và một hay nhiều các đạo hàm của nó, bất kể đạo hàm thông thường hay đạo hàm riêng.

Ví dụ của phương trình vi phân trong thực tế rất đa dạng:

Phương trình vi phân	**Ứng dụng**
$\frac{dp}{dt} = rp$	Quy luật Malthusian của gia tăng dân số
$\frac{dx}{dt} = k(A - x)^2$	Tốc độ phản ứng động học bậc 2
$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{C}{L}\sqrt{\left(\frac{AC}{L}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$	Nghiệm của phương trình là hàm mô tả hình dáng của Gateway Arch (St.Louis)
$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$	Phương trình mô tả dao động tắt dần của lò xo dưới tác dụng lực cản
$\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \left(E - \frac{1}{2}kx^2\right)\psi = 0$	Phương trình sóng Schrodinger cho hệ dao động điều hòa một chiều đơn giản
$x'' - \varepsilon(1 - x^2)x' + x = 0$	Phương trình van der Pol mô tả dòng điện trong mạch có điện trở phi tuyến

Phương trình vi phân có nhiều loại, đơn cử là *phương trình vi phân thông thường* và *phương trình vi phân riêng phần* (partial differential equation, PDE). Ngoài ra còn có *phương trình vi-tích phân* (integro-differential equation).

Các phương trình trong bảng trên đều là ví dụ của phương trình vi phân thông thường do chỉ liên quan đến các đạo hàm của hàm một biến. Ở đâu, nếu không nói gì thêm thì ta hiểu phương trình vi phân là phương trình vi phân thông thường.

Phương trình vi phân riêng phần bao gồm các đạo hàm riêng của hàm nhiều biến. Một ví dụ điển hình của nó là phương trình dẫn nhiệt trên một thanh sắt cực mỏng:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

Trong đó, $u(x,t)$ là nhiệt độ tại điểm x của thanh sắt tại thời điểm t.

Phương trình vi-tích phân đúng như tên gọi của nó, không chỉ gồm đạo hàm mà còn có cả nguyên hàm của hàm cần tìm. Ví dụ:

$$x'(t) = f(t) + \int k(t-u)x(u)du$$

Ở đây, ta chỉ chú ý đến các phương trình vi phân thông thường, và nếu có thể sẽ nói sơ nét về các loại còn lại.

Có một điểm đáng lưu ý là như những phương trình đại số thường gặp trong toán phổ thông, không có một cách giải tổng quát nào cho mọi phương trình vi phân. Trên thực tế, người ta chỉ quan tâm đến việc giải các loại phương trình vi phân có ý nghĩa thực tiễn. Có thể nói phương trình vi phân đi ra từ thực tế và do đó là một công cụ mạnh để mô hình hóa nhiều vấn đề thực tế.

Nói đến một số khái niệm xung quanh phương trình vi phân, trước hết phải nói đến bậc.

Bậc của một phương trình vi phân thông thường là bậc của đạo hàm cấp cao nhất có trong phương trình.

Ví dụ:

$x' = k(a-x^2)$ là phương trình vi phân bậc 1

$2xyy' + (yy')^2 = y^2$ cũng là một phương trình vi phân bậc 1

$EI\frac{d^4y}{dx^4} = w(x)$ là phương trình vi phân bậc 4

Như mọi loại phương trình, hệ phương trình, phương trình vi phân cũng có nghiệm.

Một hàm f là **nghiệm của một phương trình vi phân** nếu $y = f(x)$ và các đạo hàm của nó thỏa phương trình. Việc **giải phương trình vi phân** là tìm ra các nghiệm của phương trình đó.

Nghiệm của phương trình vi phân có hai loại:

Nghiệm tổng quát là một họ các phương trình khác nhau bởi một hay nhiều hằng số c.

Ví dụ: $y = ce^x$ là một nghiệm tổng quát của $y' = y$

hay $y = c_1 \sin x + c_2 \cos x$ là một nghiệm tổng quát của $y'' = -y$

Nghiệm riêng là một phương trình xác định. Nghiệm riêng được tìm thấy khi ta có một hay nhiều ***điều kiện ban đầu*** của phương trình. Điều kiện ban đầu có thể là giá trị của hàm cần tìm hoặc các đạo hàm của nó tại một điểm nào đó.

Ví dụ: $y = e^x$ là một nghiệm riêng của $y' = y$ với điều kiện đầu $y(0) = 1$

hay $y = \sin x + 2\cos x$ là một nghiệm riêng của $y'' = -y$ với điều kiện đầu $y(0) = 2$ và $y'(0) = 1$.

Phương trình vi phân bậc I:

1/ Mô hình gia tăng dân số:

Một mô hình gia tăng dân số được xây dựng dựa trên giả thiết là tốc độ gia tăng dân số của một quần thể (người, động vật, vi khuẩn,…) tỉ lệ thuận với kích thước quần thể. Giả thiết này là chấp nhận được trong điều kiện lý tưởng (môi trường thuận lợi, đầy đủ dinh dưỡng, không có các loài nguy hiểm, miễn nhiễm với dịch bệnh,…).

Tại thời điểm t, số lượng cá thể (hay dân số) của quần thể là $P(t)$. Tốc độ gia tăng dân số theo thời gian được đo bởi $P'(t)$ hay dP/dt. Giả thiết trên có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$P'(t) = kP(t) \; hay \; \frac{dP}{dt} = kP$$

Trong đó, k là hằng số. Nếu k > 0, dân số tăng theo thời gian. Nếu k < 0, dân số giảm theo thời gian. Phương trình trên là mô hình đầu tiên cho sự tăng trưởng dân số của một quần thể, đây là phương trình vi phân vì nó có chứa một hàm chưa biết $P(t)$ và đạo hàm dP/dt của nó.

Nghiệm của phương trình này được cho như sau (cách giải sẽ được bàn ở phía sau):

$$P(t) = Ce^{kt}$$

Với C là một hằng số. Ta có thể kiểm nghiệm điều này:

$$P'(t) = (Ce^{kt})' = kCe^{kt} = kP(t)$$

Có thể thấy nghiệm của một phương trình vi phân là một họ phương trình. Trong trường hợp này, ta chỉ quan tâm tới các phương trình có $P(t) > 0, \forall t$ tức $C > 0$. Ngoài ra, ta cũng chỉ quan tâm khoảng thời gian sau thời điểm ban đầu, tức trên miền $t \geq 0$. Tại thời điểm ban đầu $t = 0$, số lượng cá thể là $P(0) = C$. Vậy ra C chính là kích thước ban đầu của quần thể.

Như đã nói, phương trình trên phù hợp trong điều kiện lý tưởng. Tuy nhiên, chúng ta có thể xây dựng một số phương trình khác phù hợp hơn với thực tế.

a/ Nếu tính đến yếu tố di trú, giả sử tốc độ di trú là một hằng số m, mô hình có thể được hiệu chỉnh thành:

$$\frac{dP}{dt} = kP - m$$

b/ Ngoài ra, nguồn tài nguyên của môi trường sống là có hạn, đồng nghĩa với việc môi trường chỉ đủ nuôi dưỡng một quần thể có dân số tối đa là M, hay còn gọi là mức bão hòa dân số. Để mô hình có thể thể hiện xu hướng tăng trưởng giảm dần khi càng gần tới M, ta đặt ra hai giả thiết:

(1) $dP/dt \approx kP$ với P đủ nhỏ (ban đầu, tốc độ tăng trưởng tỉ lệ với P)

(2) $dP/dt < 0$ nếu $P > M$ (dân số sẽ giảm dần khi vượt mức bão hòa)

Một cách biểu diễn khi kết hợp hai giả thiết trên là:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Có thể thấy, khi P nhỏ (so với M) ta có thể bỏ qua P/M nên $dP/dt \approx kP$. Nếu $P > M$ thì $1 - P/M$ cho giá trị âm và $dP/dt < 0$.

Phương trình này được gọi là phương trình vi phân logistic, hay mô hình logistic. Để ý thấy $P(t) = 0$ và $P(t) = M$ là một nghiệm của phương trình trên. Điều này hợp với thực tế bởi vì nếu dân số luôn ở mức 0 hoặc bão hòa thì nó sẽ giữ nguyên trạng thái đó. Hai nghiệm hằng này được gọi là nghiệm cân bằng.

c/ Ngược lại, một số loài có mức dân tối thiểu m để duy trì nòi giống. Nếu tụt xuống dưới mức này thì giống loài đó sẽ đến bờ diệt chủng. Tương tự như trên, ta có mô hình:

$$\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$$

2/ Cách giải một số dạng:

a/ Dạng tách biến:

Phương trình tách biến là phương trình vi phân bậc nhất có thể biểu diễn dưới dạng:

$$y' = g(x)f(y)$$

Có thể thấy phương trình trên có thể tách hai biến x, y về hai phía của dấu bằng. Nếu $f(y) \neq 0$, ta tách hai biến về hai phía rồi lấy nguyên hàm theo biến x:

$$\frac{y'}{f(y)} = g(x) \Rightarrow \int \frac{dy}{f(y)} = \int \frac{y'dx}{f(y)} = \int g(x)dx$$

Từ đó, ta có thể tìm ra hàm y theo biến x.

<u>Ví dụ:</u>

Một ví dụ của dạng tách biến là mô hình tăng trưởng dân số được bàn ở trên.

$$P'(t) = kP(t), P(0) = P_0$$

<u>Giải:</u>

$$P' = kP \Rightarrow \frac{P'}{P} = k \Rightarrow \int \frac{P'dt}{P} = \int kdt \Rightarrow \int \frac{dP}{P} = kt + C$$

$$\Rightarrow \ln|P| = kt + C \Rightarrow |P| = e^{kt+C} = Ce^{kt}$$

Do ta chỉ quan tâm tới $P > 0$ nên có nghiệm tổng quát

$$P = Ce^{kt}$$

Dân số ban đầu $P_0 = P(0) = Ce^{0t} = C$.

Vậy phương trình có nghiệm riêng $P = P_0e^{kt}$

Hoặc đối với mô hình logistic:

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right), P(0) = P_0$$

<u>Giải:</u>

$$P' = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) \Rightarrow \frac{MP'}{P(P-M)} = -k \Rightarrow \int \frac{MdP}{P(P-M)} = -\int kdt$$

$$\Rightarrow \int \left(\frac{1}{P-M} - \frac{1}{P}\right) dP = -kt + C \Rightarrow \ln\left|\frac{P-M}{P}\right| = -kt + C$$

$$\Rightarrow \left|\frac{P-M}{P}\right| = Ce^{-kt} \Rightarrow P = \frac{M}{1 + Ce^{-kt}}$$

Điều kiện đầu

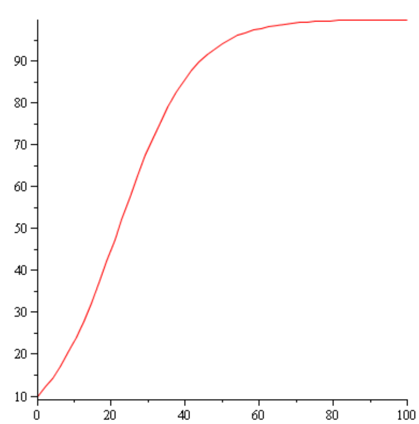
$$P_0 = P(0) = \frac{M}{1+C} \Rightarrow C = \frac{M}{P_0} - 1$$

Vậy nghiệm của phương trình là

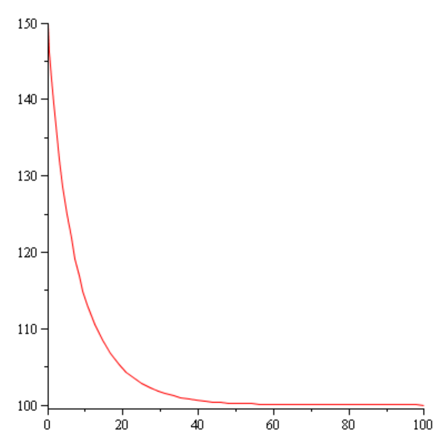
$$P = \frac{M}{1 + \left(\frac{M}{P_0} - 1\right) e^{-kt}}$$

Minh họa: Xét $k = 0.1, M = 100$ và $P_0 = \{10,110\}$:

$P_0 = 10$



$P_0 = 110$



b/ Dạng biến thể của dạng tách biến:

Trong một số trường hợp, phương trình vi phân có dạng biến thể:

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

Để giải các phương trình vi phân dạng này, ta đặt:

$$u = \frac{y}{x} \Rightarrow y = ux \Rightarrow y' = u'x + u$$

Thế vào phương trình ban đầu, ta có:

$$u'x + u = f(u) \Rightarrow u'x = f(u) - u$$

Nếu $f(u) \equiv u$ thì phương trình ban đầu của chúng ta là dạng tách biến. Thay vì đặt u, ta giải như trên.

Nếu tồn tại các giá trị $u = a$ thỏa $f(u) - u = 0$ thì phương trình ban đầu có các nghiệm $y = ax$

Mặt khác, phương trình được giải tiếp tục:

$$\frac{u'}{f(u) - u} = x \Leftrightarrow \int \frac{du}{f(u) - u} = \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

Từ đó tìm ra u và $y = ux$.

<u>**Ví dụ:**</u> Giải phương trình vi phân:

$$xy' = x \sin\frac{y}{x} + y$$

<u>**Giải:**</u>

$$xy' = x \sin\frac{y}{x} + y \ (x \neq 0) \Leftrightarrow y' = \sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}$$

Đặt $u = \frac{y}{x} \Rightarrow y' = u + u'x$. PT trở thành $u + u'x = \sin u + u \Leftrightarrow u'x = \sin u$

Xét $\sin u = 0 \Leftrightarrow u = k\pi$.

Vậy $y = k\pi x$ ($k \in \mathbb{Z}$) là nghiệm của phương trình.

$$\frac{u'}{\sin u} = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \int \frac{du}{\sin u} = \int \frac{dx}{x} \Leftrightarrow \int \frac{-d(\cos u)}{1-\cos^2 u} = \ln|x| + C$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\ln\frac{\cos u - 1}{\cos u + 1} = \ln|x| + C \Leftrightarrow \frac{\cos u - 1}{\cos u + 1} = Cx^2 \Leftrightarrow \cos u = \frac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$$

Vậy phương trình có nghiệm khác là

$$y = x \arccos\frac{1 + Cx^2}{1 - Cx^2}$$

Kết luận: $y = k\pi x$ ($k \in \mathbb{Z}$) hoặc $y = x \arccos\frac{1+Cx^2}{1-Cx^2}$

c/ Dạng tuyến tính:

Phương trình vi phân bậc I tuyến tính có dạng:

$$y' + q(x)y = p(x)$$

Trong đó: $y = f(x)$ là hàm cần tìm và $q(x), p(x)$ là các hàm theo x đã biết.

Để giải phương trình trên, ta tìm một nguyên hàm $Q(x)$ của $q(x)$ ($Q'(x) = q(x)$) và nhân hai vế với $e^{Q(x)}$. Khi đó, phương trình trở thành:

$$e^{Q(x)}y' + e^{Q(x)}Q'(x)y = e^{Q(x)}p(x)$$

$$\Rightarrow \left(e^{Q(x)}y\right)' = e^{Q(x)}p(x) \Rightarrow e^{Q(x)}y = \int e^{Q(x)}p(x)dx$$

Từ đó tìm được hàm $y = f(x)$.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân:

$$y' + y = \sin(e^x)$$

Giải: Xét $x = \int dx$, nhân e^x vào hai vế của phương trình:

$$e^x y' + e^x y = e^x \sin e^x \Leftrightarrow (e^x y)' = e^x \sin e^x$$

$$\Leftrightarrow e^x y = \int e^x \sin e^x \, dx = \int \sin e^x \, d(e^x) = -\cos e^x + C$$

Vậy nghiệm phương trình là

$$y = \frac{-\cos e^x + C}{e^x}$$

d/ Dạng Bernouli:

Đôi lúc, ta sẽ gặp phương trình vi phân có dạng:

$$y' + q(x)y = p(x)y^n, n \neq 0, n \neq 1$$

Để giải phương trình trên, ta đặt $u = y^{1-n} \Rightarrow u' = (1-n)y^{-n}y'$

Thế vào phương trình, có: $(1-n)y^{-n}y' + (1-n)y^{-n}q(x)y = (1-n)y^{-n}p(x)y^n$

Hay: $u' + (1-n)q(x)u = (1-n)p(x)$

Phương trình đã được đưa về dạng tuyến tính, ta giải như trên.

Ví dụ: Giải phương trình vi phân sau:

$$xy' - y = -xy^2$$

Giải: Đặt $u = y^{1-2} = y^{-1} \Rightarrow u' = -y^{-2}y'$

$\Rightarrow x(-y^{-2}y') - (-y^{-2}y) = -x(-y^{-2}y^2) \Leftrightarrow xu' + u = x$

$\Leftrightarrow (xu)' = x \Leftrightarrow xu = \int xdx = \dfrac{x^2}{2} + C \Leftrightarrow u = \dfrac{x}{2} + \dfrac{C}{x}$

Vậy

$$y = u^{-1} = \frac{1}{\frac{x}{2} + \frac{C}{x}} = \frac{2x}{x^2 + C}$$

Phương trình vi phân bậc II:

1/ Mô hình chuyển động của lò xo:

Phương trình vi phân cũng được ứng dụng nhiều trong các mô hình vật lý. Xét một hệ lò xo gồm một vật nặng có khối lượng m treo cân bằng trên một lò xo nằm ngang có độ cứng k. Định luật Hooke cho biết nếu lò xo bị kéo dãn (hoặc nén) một độ dài x so với trạng thái tự nhiên của nó thì nó sẽ sinh ra một lực tỉ lệ thuận với x:

$$F = -kx$$

Dấu trừ trong biểu thức trên thể hiện hướng của lực sinh ra này ngược chiều với độ dãn. Nếu bỏ qua ngoại lực (ma sát hoặc lực cản không khí) thì theo định luật II của Newton, gia tốc của một vật tỉ lệ thuận với lực tác dụng lên vật và tỉ lệ nghịch với khối lượng, hay $F = ma$. Biết rằng gia tốc là đạo hàm của vận tốc, hay đạo hàm bậc hai của độ dời:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx$$

Đây là một ví dụ của phương trình vi phân bậc hai bởi vì trong nó có tồn tại một đạo hàm cấp hai. Phương trình này có thể viết lại thành:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x = -\omega^2 x, \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Phương trình này cho thấy đạo hàm cấp hai của x tỉ lệ thuận với x nhưng trái dấu. Có thể nghĩ ngay đến hai hàm có tính chất này là hàm sin và cos. Thực tế, nghiệm của phương trình này cũng chính là sự kết hợp của hai hàm này và do đó chuyển động của một vật trong hệ lò xo là dao động điều hòa xung quanh vị trí cân bằng.

Tương tự trên, phương trình này đúng trong điều kiện lý tưởng không có lực cản hay ngoại lực. Một số lực tác động có thể kể đến là:

a/ Trọng lực P: Trong trường hợp lò xo nằm ngang, trọng lực tác dụng vuông góc với mặt sàn và cân bằng với lực nâng của mặt sàn, do đó ta không để ý tới trọng lực. Tuy nhiên, khi treo vật trên lò xo thẳng đứng (vật ở dưới hoặc trên), hay trên mặt sàn nghiêng, trọng lực tác động rất nhiều đến chuyển động của lò xo.

$P = mg$ trong đó g là gia tốc trọng trường. Gia tốc trọng trường khác biệt ở các nơi khác nhau trên Trái Đất, nhưng thông dụng nhất $g = 9.8\ m/s^2$ hoặc $g = 10\ m/s^2$.

b/ Lực cản F_d: Lực cản nổi tiếng nhất có thể kể đến là lực ma sát hoặc lực cản của gió. Nhìn chung, lực cản có công thức:

$$F_d = -\mu x'$$

Trong đó μ là hệ số cản ($\mu > 0$). Dấu trừ cho thấy lực cản ngược chiều với x' hay vận tốc của vật, nói cách khác ngược chiều chuyển động của vật.

c/ Ngoại lực $F(t)$: bất kì lực nào tác dụng lên vật có thể gọi chung là ngoại lực.

Xét hệ lò xo thẳng đứng, chiều dương hướng xuống.

Lúc treo vật, mặc dù không tác dụng lực nhưng vật nặng vẫn chịu tác dụng trọng lực hướng xuống dưới, do đó lò xo có một biến dạng ban đầu $k\Delta l = mg$.

Tại thời điểm t bất kì từ lúc lò xo bắt đầu dao động, độ dời của vật nặng so với vị trí cân bằng là x. Vật nặng lúc này chịu lực đàn hồi $F_k = -k(\Delta l + x)$.

Xét vật nặng chịu tác dụng của $P, F_k, F_d, F(t)$ có gia tốc x'', ta có:

$$mx'' = P + F_k + F_d + F(t) = mg - k(\Delta l + x) - \mu x' + F(t)$$

Từ đó ta rút ra phương trình vi phân mô tả chuyển động của hệ lò xo này:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

Cùng với đó, ta có các điều kiện đầu: $x(0) = x_0, x'(0) = v_0$ là độ dời và vận tốc ban đầu.

2/ Một số khái niệm:

Khi nói tới phương trình vi phân cấp 2 (và các cấp cao hơn), cần có thêm một số khái niệm.

Phương trình hệ số hằng là phương trình có dạng:

$$ay'' + by' + cy = G(x)$$

Trong đó a, b, c là các hệ số hằng, $a \neq 0$.

Khi $G(x) = 0$, phương trình trên được gọi là ***phương trình thuần nhất*** (hệ số hằng).

Phương trình đặc trưng của phương trình vi phân bậc 2 trên là:

$$ar^2 + br + c = 0$$

Chúng ta sẽ tìm hiểu cách giải phương trình vi phân bậc 2 hệ số hằng dựa trên ba phương trình trên.

3/ Cách giải phương trình vi phân bậc 2 hệ số hằng:

a/ Phương trình thuần nhất:

Như đã nói, phương trình thuần nhất có dạng:

$$ay'' + by' + cy = 0 \ (1)$$

Xét phương trình đặc trưng:

$$ar^2 + br + c = 0 \ (2)$$

Giải phương trình trên ta có 3 trường hợp:

TH1: (2) có hai nghiệm phân biệt $r_1, r_2 \Rightarrow (1)$ có nghiệm tổng quát:

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

TH2: (2) có nghiệm kép $r = r_1 = r_2 \Rightarrow (1)$ có nghiệm tổng quát:

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{rx}$$

TH3: (2) vô nghiệm, 2 nghiệm phức liên hợp của (2) là $r = a \pm bi$

$$y = (c_1 \cos bx + c_2 \sin bx)e^{ax}$$

Lấy bài toán hệ lò xo thẳng đứng trên làm ví dụ. Giả sử không có ngoại lực tác động thì phương trình trên là một phương trình thuần nhất.

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + \mu\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Đặt $\eta = \frac{\mu}{2m} > 0$ và $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} > 0$, phương trình được viết lại thành:

$$x'' + 2\eta x' + \omega^2 x = 0 \ (1)$$

Phương trình đặc trưng: $r^2 + 2\eta r + \omega^2 = 0 \ (2) \Leftrightarrow (r + \eta)^2 = \eta^2 - \omega^2$

Xét ba trường hợp:

TH1: $\eta > \omega$, (2) có hai nghiệm phân biệt $r = -\eta \pm \sqrt{\eta^2 - \omega^2}$

Phương trình (1) có nghiệm tổng quát:

$$x = c_1 e^{\left(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\right)t}$$

Xét điều kiện đầu $\begin{cases} x_0 = x(0) = c_1 + c_2 \\ v_0 = x'^{(0)} = \left(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\right)c_1 + \left(-\eta - \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\right)c_2 \end{cases}$

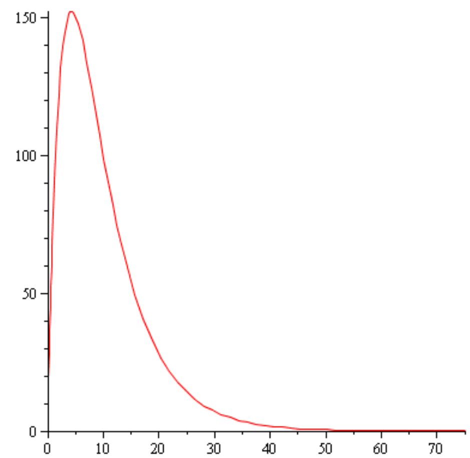
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = \dfrac{\left(\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\right)x_0 + v_0}{2\sqrt{\eta^2 - \omega^2}} \\ c_2 = \dfrac{\left(-\eta + \sqrt{\eta^2 - \omega^2}\right)x_0 - v_0}{2\sqrt{\eta^2 - \omega^2}} \end{cases}$$

Vậy một hệ lò xo thẳng đứng dao động điều hòa không có ngoại lực sẽ chuyển động theo phương trình:

$$x = c_1 e^{\left(-\eta+\sqrt{\eta^2-\omega^2}\right)t} + c_2 e^{\left(-\eta-\sqrt{\eta^2-\omega^2}\right)t}$$

Minh họa: $m = 1kg, \mu = 0.5, k = 0.05$. Vật được cho vận tốc đầu $v_0 = 100\ m/s$

Phương trình: $x = 250(e^{-0.1t} - e^{-0.5t})$ đạt cực đại ~ 133.75 tại $t = 2.5 \ln 5 \approx 4\ (s)$



TH2: $\eta = \omega$, (2) có nghiệm kép $r = -\eta$

Phương trình (1) có nghiệm tổng quát

$$x = (c_1 + c_2 t)e^{-\eta t}$$

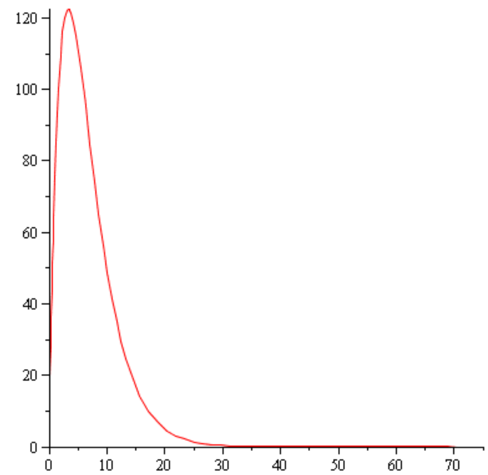
Xét điều kiện đầu: $\begin{cases} x_0 = x(0) = c_1 \\ v_0 = x'(0) = c_2 - \eta c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = v_0 + \eta x_0 \end{cases}$

Lúc này, hệ lò xo dao động theo phương trình:

$$x = [x_0 + (v_0 + \eta x_0)t]e^{-\eta t}$$

Minh họa: $m = 1kg, \mu = 0.6, k = 0.09$. Vật được cho vận tốc đầu $v_0 = 100\ m/s$

Phương trình: $x = 100te^{-0.3t}$ đạt cực đại $\sim$122.63 tại $t = 10/3 \approx 3.33\ (s)$



TH3: $\eta < \omega$, (2) có hai nghiệm phức liên hợp $r = -\eta \pm \sqrt{\omega^2 - \eta^2}i$

Phương trình (1) có nghiệm tổng quát:

$$x = \left(c_1 \cos\sqrt{\omega^2 - \eta^2}t + c_2 \sin\sqrt{\omega^2 - \eta^2}t\right) e^{-\eta t}$$

Xét điều kiện đầu: $\begin{cases} x_0 = x(0) = c_1 \\ v_0 = x'(0) = c_2\sqrt{\omega^2 - \eta^2} - \eta c_1 \end{cases}$

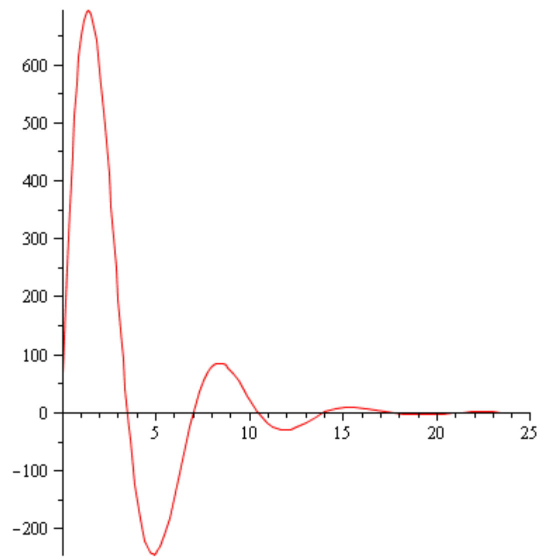
$$\Leftrightarrow \begin{cases} c_1 = x_0 \\ c_2 = \dfrac{v_0 + \eta x_0}{\sqrt{\omega^2 - \eta^2}} \end{cases}$$

Vật hệ lò xo dao động theo phương trình:

$$x = \left[x_0 \cos\sqrt{\omega^2 - \eta^2}t + \frac{v_0 + \eta x_0}{\sqrt{\omega^2 - \eta^2}} \sin\sqrt{\omega^2 - \eta^2}\, t\right] e^{-\eta t}$$

Minh họa: $m = 1kg, \mu = 0.6, k = 0.9$. Vật được cho vận tốc đầu $v_0 = 100\ m/s$

Phương trình: $x = \frac{10000}{9} e^{-0.3t} \sin 0.9t$



Trong thực tế, lò xo có độ cứng k (N/m) lớn hơn rất nhiều lần so với hệ số cản và do đó chuyển động như trường hợp 3 với $\omega > \eta$ hay $k > \mu/4m$ là thường gặp hơn cả, thậm chí có thể bỏ qua lực cản.

Trong trường hợp bỏ qua lực cản, tức $\eta = 0$:

$$x = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t$$

Đặt $A = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}$ và $\varphi = \arctan \frac{v_0}{\omega x_0}$ ta có:

$$x = A(\cos \omega t \cos \varphi + \sin \omega t \sin \varphi) = A \cos(\omega t - \varphi)$$

Ở đây, φ gọi là pha ban đầu và ω gọi là tần số góc của dao động điều hòa. x là li độ và A gọi là biên độ của dao động. Dao động có li độ thỏa mãn hàm trên được gọi là một dao động điều hòa.

b/ Phương trình hệ số hằng:

$$ay'' + by' + cy = G(x) \ (1)$$

Đầu tiên, ta giải phương trình thuần nhất tương ứng $ay'' + by' + cy = 0$ (2) bằng cách xét phương trình đặc trưng $ar^2 + br + c = 0$ (3) như trên. Nghiệm của phương trình này là y_C (C tương ứng complementary, hay bổ trợ).

Nghiệm tổng quát của (1) là $y = y_C + y_p$ với y_p là một nghiệm cụ thể của (1).

Cách tìm y_p tùy thuộc vào hàm $G(x)$.

i/ $G(x) = P_n(x)e^{rx}$ với $P_n(x)$ là đa thức bậc n biến x.

<u>TH1:</u> r không là nghiệm của (2)

Chọn $y_p = Q_n(x)e^{rx}$ là một nghiệm cụ thể của (1).

<u>TH2:</u> r là một trong hai nghiệm thực của (2)

Chọn $y_p = xQ_n(x)e^{rx}$ là một nghiệm cụ thể của (1).

<u>TH3:</u> r là nghiệm kép của (2)

Chọn $y_p = x^2Q_n(x)e^{rx}$ là một nghiệm cụ thể của (1).

ii/ $G(x) = e^{ax}(P_n(x)\cos bx + Q_m(x)\sin bx)$

Chọn $s = \max\{m, n\}$

<u>TH1:</u> $r = a \pm bi$ là nghiệm phức của (2)

Chọn $y_p = xe^{ax}(R_s(x)\cos bx + T_s(x)\sin bx)$ là một nghiệm cụ thể của (1).

<u>TH2:</u> $r = a \pm bi$ không là nghiệm phức của (2)

Chọn $y_p = e^{ax}(R_s(x)\cos bx + T_s(x)\sin bx)$ là một nghiệm cụ thể của (1).

Sau khi tìm được dạng nghiệm cụ thể của (1), ta tìm y_p'' và y_p' và thế vào (1) để tìm chính xác y_p bằng phương pháp đồng nhất hệ số.

iii/ Trong trường hợp $G(x)$ không thuộc các trường hợp trên, ta dùng phương pháp biến thiên hằng số:

Phương trình (1) có nghiệm $y_C = c_1 y_1 + c_2 y_2$

Giải hệ phương trình tìm u_1' và u_2'

$$\begin{cases} y_1 u_1' + y_2 u_2' = 0 \\ a(y_1' u_1' + y_2' u_2') = G \end{cases}$$

Từ đó tìm được u_1 và u_2. Nghiệm cụ thể của (1) lúc này là:

$$y_p = u_1 y_1 + u_2 y_2$$

Ngoài ra, ta có ***nguyên lý chồng chất nghiệm***:

Hai phương trình vi phân

$$ay'' + by' + cy = G_1(x)$$

$$ay'' + by' + cy = G_2(x)$$

Có nghiệm cụ thể lần lượt là y_{p_1} và y_{p_2}.

Khi đó, phương trình vi phân $ay'' + by' + cy = G_1(x) + G_2(x)$ có nghiệm cụ thể

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

Lại xét bài toán hệ lò xo nhưng trong trường hợp đặc biệt: không có lực cản F_d nhưng có ngoại lực $F(t)$ tác động. Ta có phương trình vi phân:

$$x'' + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Xét phương trình thuần nhất: $x'' + \omega^2 x = 0$ có phương trình đặc trưng $r^2 + \omega^2 = 0$ có hai nghiệm phức liên hợp $r = \pm\omega i$

Phương trình thuần nhất có nghiệm $y_C = c_1 \cos\omega t + c_2 \sin\omega t = A\cos(\omega t + \varphi)$

Đặc biệt, ngoại lực này cũng biến thiên điều hòa, tức có dạng:

$$F(t) = F_0 \cos(\theta t + \phi)$$

Trong đó, θ là tần số góc và ϕ là pha ban đầu.

Có: $F(t) = F_0 \cos\phi \cos\theta t + F_0 \sin\phi \sin\theta t = e^{-at}(P_n(t)\cos bt + Q_m(t)\sin bt)$ với:

$$\begin{cases} P_n(t) = F_0 \cos\phi\,, n = 0 \\ Q_m(t) = F_0 \sin\phi\,, m = 0 \\ a = 0, b = \theta \end{cases}$$

TH1: $\omega \neq \theta, r = \pm\theta i$ không phải nghiệm phức của phương trình đặc trưng.

Chọn $x_p = p\cos\theta t + q\sin\theta t$ là một nghiệm cụ thể.

Có: $x_p' = -p\theta\sin\theta t + q\theta\cos\theta t$ và $x_p'' = -p\theta^2\sin\theta t - q\theta^2\cos\theta t$ thế vào:

$$(-p\theta^2\sin\theta t - q\theta^2\cos\theta t) + \omega^2(p\cos\theta t + q\sin\theta t)$$
$$= \frac{F_0}{m}(\cos\phi\cos\theta t + F_0\sin\phi\sin\theta t)$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} -\theta^2 p + \omega^2 q = \dfrac{F_0}{m}\sin\phi \\ \omega^2 p - \theta^2 q = \dfrac{F_0}{m}\cos\phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{\omega^2\cos\phi + \theta^2\sin\phi}{\omega^4 - \theta^4} \\ q = \dfrac{F_0}{m}\dfrac{\omega^2 sin\phi + \theta^2\cos\phi}{\omega^4 - \theta^4} \end{cases}$$

$$y_p = \frac{F_0}{m}\frac{\omega^2\cos\phi + \theta^2\sin\phi}{\omega^4 - \theta^4}\cos\theta t + \frac{F_0}{m}\frac{\omega^2 sin\phi + \theta^2\cos\phi}{\omega^4 - \theta^4}\sin\theta t$$

$$= \frac{F_0}{m(\omega^4 - \theta^4)}[\omega^2(\cos\phi\cos\theta t + \sin\phi\sin\theta t) + \theta^2(\sin\phi\cos\theta t + \cos\phi\sin\theta t)]$$

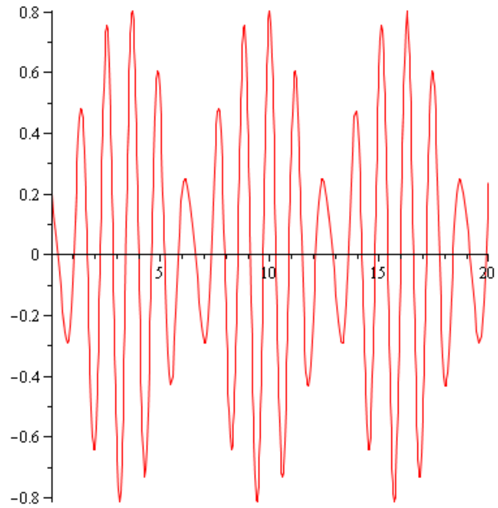
$$= \frac{F_0}{m(\omega^4 - \theta^4)}[\omega^2\cos(\theta t - \phi) + \theta^2\sin(\theta t + \phi)]$$

Vậy phương trình có nghiệm tổng quát:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{m(\omega^4 - \theta^4)}[\omega^2\cos(\theta t - \phi) + \theta^2\sin(\theta t + \phi)]$$

Minh họa: Cho hệ lò xo với vật nặng $m = 3kg$, lò xo có độ cứng $k = 75\ N/m$ dao động chịu ngoại lực $F = 10\cos 6t$. Biết ban đầu vật có li độ $x_0 = 0.2\ m$, vận tốc $v_0 = -0.1\ m/s$

$$3x'' + 75x = 10\cos 6t \Rightarrow x = -\frac{1}{10}\sin 5t + \frac{83}{165}\cos 5t - \frac{10}{33}\cos 6t$$



TH2: $\omega = \theta, r = \pm\theta i$ là nghiệm phức của phương trình đặc trưng

Chọn $x_p = t(p\cos\theta t + q\sin\theta t)$ là một nghiệm cụ thể.

Có: $x_p' = (q - p\theta t)\sin\theta t + (p + q\theta t)\cos\theta t$

$x_p'' = (-2p\theta - q\theta^2 t)\sin\theta t + (2q\theta - p\theta^2 t)\cos\theta t$ thế vào:

$$(-2p\theta - q\theta^2 t)\sin\theta t + (2q\theta - p\theta^2 t)\cos\theta t + \theta^2 t(p\cos\theta t + q\sin\theta t) = \frac{F_0}{m}\cos\phi\cos\theta t + \frac{F_0}{m}\sin\phi\sin\theta t$$

Đồng nhất hệ số ta có:

$$\begin{cases} -2p\theta = \dfrac{F_0}{m}\sin\phi \\ 2q\theta = \dfrac{F_0}{m}\cos\phi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = -\dfrac{F_0\sin\phi}{2m\theta} \\ q = \dfrac{F_0\cos\phi}{2m\theta} \end{cases}$$

$$x_p = t\left(-\frac{F_0\sin\phi}{2m\theta}\cos\theta t + \frac{F_0\cos\phi}{2m\theta}\sin\theta t\right)$$

$$= \frac{F_0 t}{2m\theta}(\sin\theta t\cos\phi - \sin\phi\cos\theta t) = \frac{F_0}{2m\theta}t\sin(\theta t - \phi)$$

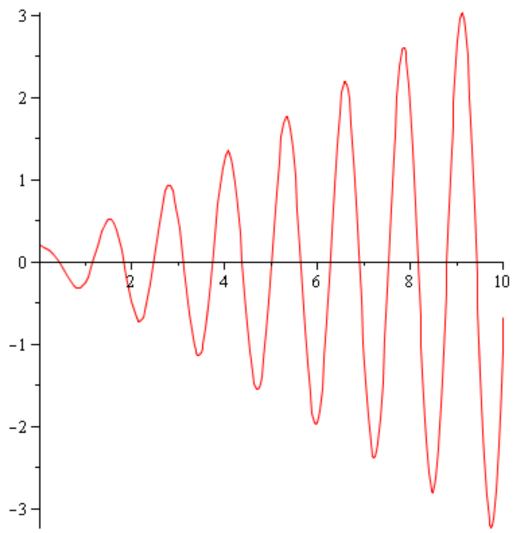
Vậy phương trình có nghiệm tổng quát:

$$x = A\cos(\omega t + \varphi) + \frac{F_0}{2m\theta}t\sin(\omega t - \phi)$$

Minh họa: Cho hệ lò xo với vật nặng $m = 3kg$, lò xo có độ cứng $k = 75\ N/m$ dao động chịu ngoại lực $F = 10\cos 5t$. Biết ban đầu vật có li độ $x_0 = 0.2\ m$, vận tốc $v_0 = -0.1\ m/s$

$$3x'' + 75x = 10\cos 5t$$

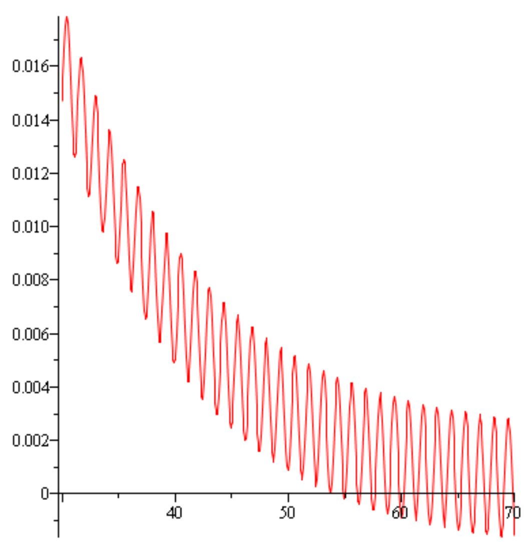
$$x = -\frac{1}{50}\sin 5t + \frac{1}{5}\cos 5t + \frac{1}{3}t\sin 5t \approx 0.2\cos(5t + 0.1) + \frac{1}{3}t\sin 5t$$



Trong trường hợp tổng quát nhất, lò xo có lực cản và chịu ngoại lực:

$$x'' + 2\eta x' + \omega^2 x = \frac{F(t)}{m}$$

Xét trường hợp sử dụng số liệu như bài trên nhưng có $\mu = 900$:



Tài liệu tham khảo:

[1] Calculus, 7^{th} Edition, Stewart

[2] Ordinary Differential Equation: Concepts, Methods and Models, Leigh C. Baker

[3] Differential Equations (Math 3301), Paul Dawkins, Lamar University

[4] Giáo trình Giải tích B2, Khoa Toán ĐH KHTN TPHCM