2017, August (14 trang)

Phân Tuyến Xe buýt Ở Thành Phố Hồ Chí Minh

Nguyễn Trường Hải - Trường THPT Chuyên Trần Hưng Đạo, Bình Thuận
Tiêu Phát Đạt - Trường Phổ Thông Năng Khiếu - ĐHQG TP Hồ Chí Minh
Phạm Thanh Ngọc - Trường quốc tế Anh - Việt

Tổng quan

Nhóm chúng tôi xin đề xuất 3 mô hình cho việc phân phối xe buýt ở một số tuyến xe cụ thể ở Thành phố Hồ Chí Minh để nâng cao hiệu quả đi lại và tiết kiệm chi phí. Những mô hình này sẽ hướng tới những ưu tiên khác nhau trong việc phân phối số xe, từ đó nghiên cứu và chọn ra phương án vừa đáp ứng nhu cầu của người dân, vừa khả thi dựa theo phân bố địa bàn và dân cư trong thành phố.

Về hướng thứ nhất, chúng tôi mong muốn giảm thiểu thời gian chờ xe của hành khách trên các chuyến với số lượng xe buýt giới hạn. Sở dĩ phương án này được đề xuất là để hạn chế sự bất tiện mà hành khách phải gặp. Trong khi đó, ở hướng thứ hai, chúng tôi đảm bảo nhu cầu của hành khách và tiết kiệm chi phí mua xe buýt. Ngân sách của thành phố sẽ không gia tăng quá mức và sẽ không tốn quá nhiều vị trí cho bến bãi. Cuối cùng, chúng tôi quyết định thay đổi số trạm và vị trí của chúng, như một sự chuẩn bị hữu ích cho việc phân phối số xe vào các tuyến. Hướng 1 và 2 có thể sẽ được giải quyết tốt hơn khi có sự phân bố lại các trạm xe.

Mục lục trang

1 Đặt vấn đề

Từ lâu, xe buýt đã trở thành phương tiện giao thông công cộng quen thuộc đối với người dân Thành phố Hồ Chí Minh. Xe buýt đóng vai trò không nhỏ trong việc giải quyết nhu cầu đi lại giá rẻ cho hành khách. Hiện nay, do sự gia tăng của dân số và lượng người nhập cư từ các khu vực khác, nhu cầu sử dụng xe buýt ngày càng cao. Vì vậy, rất cần sự đầu tư đúng mức của các cơ quan chức năng để đáp ứng mong muốn xác đáng của người dân. Tuy nhiên, việc tăng số xe và xây dựng các chuyến sao cho phù hợp với địa bàn, dân cư thành phố cũng như đảm bảo nhu cầu của người đi xe buýt là không hề đơn giản. Điều này đã trở thành một vấn đề nan giải đối với bộ máy lãnh đạo Thành phố trong nhiều năm qua.

Sơ đồ các tuyến xe trong thành phố

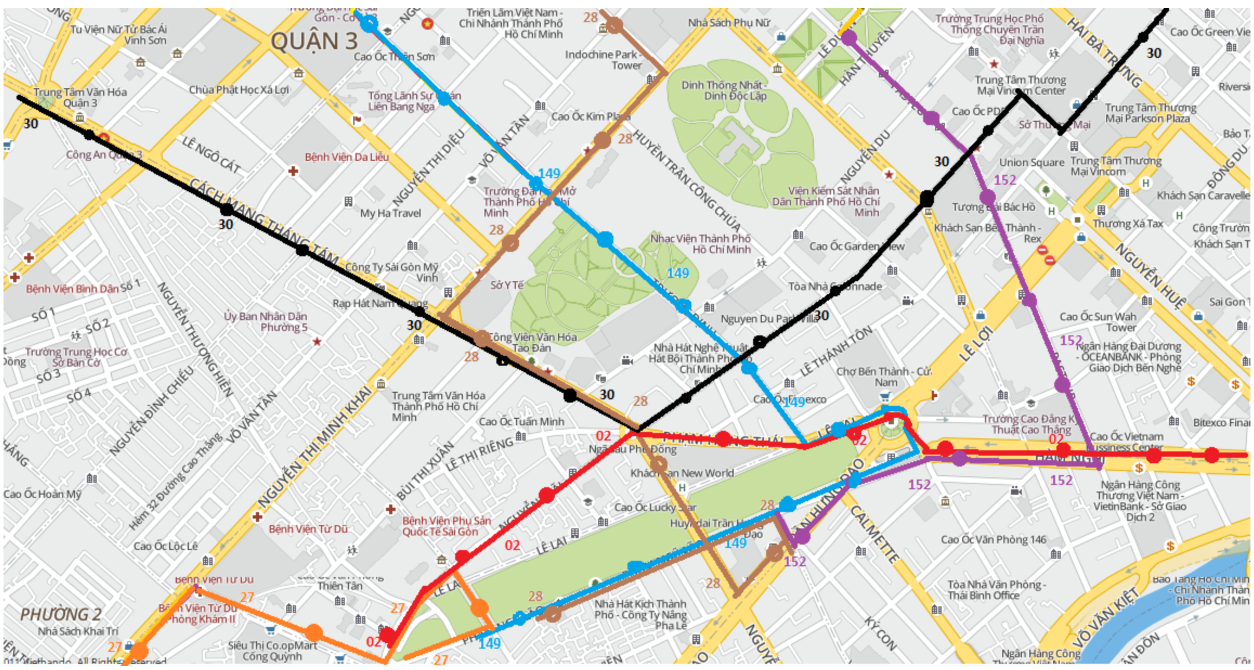
Nhận thấy yêu cầu cấp thiết đó, nhóm chúng tôi đã suy nghĩ về việc phân hoạch số xe ở các tuyến đường. Ý tưởng đó đã dẫn đến bài toán và mô hình đã nêu. Tuy nhiên, do số liệu và thời gian có hạn, ở đây chúng tôi chỉ xét 6 tuyến xe buýt cụ thể đó là: tuyến 02, 28, 30, 109, 149, 152 để tiện cho việc mô hình hoá. Nếu mở rộng theo cách này trên một quy mô lớn hơn, chúng ta có thể có một cách phân hoạch xe buýt hiệu quả giải quyết cho nhu cầu lớn hơn nhiều so với mô hình.

2 Mô hình hóa bài toán và các giả thiết

Để việc xây dựng mô hình được thuận tiện, do có một vài điều kiện phức tạp ảnh hưởng lớn đến việc nghiên cứu nên nhóm đã đơn giản hoá một số yếu tố của việc đi lại bằng xe buýt như:

(1) Giả sử sơ đồ tuyến là không đổi và giao thông luôn ở trạng thái lý tưởng.
(2) Nhu cầu đi lại là bằng nhau tại các vị trí trạm và thời gian trong ngày.
(3) Khoảng thời gian giữa 2 chuyến cách nhau trên mỗi tuyến không đổi.
(4) Các thay đổi trong mô hình áp dụng vào thực tế đều được sự chấp thuận của cơ quan có thẩm quyền.
(5) Các xe buýt được cấp sử dụng luôn trong điều kiện hoạt động tốt.
(6) Trong thực tế, một số trạm gần nhau có lượng hành khách nhỏ thì sẽ gộp lại thành 1 trạm có lượng hành khách đủ lớn trên mô hình.

Chúng tôi đưa ra một bản đồ lộ trình thu gọn các tuyến nói trên. Các đường biểu thị lộ trình của các tuyến, còn các chấm tròn đại diện cho các trạm trên tuyến đó. Mục tiêu của từng hướng đi sẽ được làm rõ ở phần dưới.



3 Hướng giải quyết

3.1 Tối ưu về nhu cầu sử dụng của người dân theo thời gian

Bài toán. Với số lượng xe buýt cho sẵn, ta cần tìm ra cách phân bố số xe buýt vào các tuyến sao cho tổng thời gian chờ của hành khách là nhỏ nhất.

Lời giải. Giả sử vận tốc của các xe trên tuyến tại mọi thời điểm là như nhau.

Xét tuyến đường i, trên đó có số trạm là $a_i + 1$, khoảng cách giữa 2 trạm là b_i và số xe buýt là s_i. Giả sử vận tốc trung bình của xe là v_t km/h thì độ dài tuyến đường là $a_i b_i$. Thời gian xe chạy hết tuyến là $\frac{a_i b_i}{v_t}$. Do đó ở bến A_i, xe đi đến bến B_i sẽ mất $\frac{a_i b_i}{v_t}$ và quay về cũng mất chừng ấy thời gian nên để đi từ A_i, đến B_i rồi quay về A_i, xe mất $m_i := \frac{2a_i b_i}{v_t}$ giờ. Lưu ý rằng A_i là bến xuất phát và B_i là bến kết thúc của chuyến thứ i.

Ta cần tính xem sau bao lâu thì có 1 xe xuất bến.

- Nếu chỉ có 1 xe thì mất m_i phút mới có 1 xe xuất bến.
- Nếu có 2 xe thì thay phiên cho nhau nên chỉ mất $\frac{m_i}{2}$ phút là có 1 xe xuất bến.
- Cứ như thế, suy ra nếu có s_i xe thì cứ sau $\frac{m_i}{s_i}$ phút là có 1 xe xuất bến.

Điều này cũng nói lên rằng với một trạm tùy ý trên tuyến đường i, cứ sau $\frac{m_i}{s_i}$ phút là có 1 xe buýt. Do trong ngày, ở tuyến i có N_i người có nhu cầu sử dụng thì tổng cộng sẽ có N_i người đi đón xe buýt tại bất cứ trạm nào trên tuyến i.

Để đơn giản vấn đề, ta giả sử rằng mỗi người này đều vừa trễ chuyến xe trước đó, và phải chờ đúng $\frac{m_i}{s_i}$ phút mới đón được chuyến tiếp theo. Do đó, tổng thời gian đợi xe (trong cả ngày) của những người trên tuyến i là: $\frac{N_i \cdot m_i}{s_i}$.

Tính tổng hết trên k chuyến từ 1 đến k, ta cần tìm giá trị nhỏ nhất của hàm mục tiêu:

$$F = \frac{N_1 \cdot m_1}{s_1} + \frac{N_2 \cdot m_2}{s_2} + \ldots + \frac{N_k \cdot m_k}{s_k}$$

trong đó $s_1 + s_2 + \ldots + s_k = L$ và $m_i = \frac{2 \cdot a_i \cdot b}{v_t}$.

Với mô hình, ta có thể tìm được các giá trị của $s_1, s_2, \ldots, s_k$ bằng bất đẳng thức Cauchy - Schwartz. Tuy nhiên khi áp dụng bất đẳng thức này, thì điều kiện các biến nguyên của ta chưa được đảm bảo. Do đó khi tìm được dấu bằng bằng bất đẳng thức Cauchy - Schwartz, khi tìm được giá tri của các biến, ta sẽ thử phần nguyên và phần trần của chúng và thử các đáp số. Giá trị thoả mãn điều kiện tốt nhất ta sẽ lấy làm kết quả.

Ví dụ 1. 6 *tuyến nêu trên có các độ dài tuyến* $a_i \cdot b_i$, *nhu cầu* N_i *và tổng số xe* $L = \Sigma s_i = 50$ *được ghi lại theo bảng sau:*

Tuyến	*02*	*28*	*30*	*109*	*149*	*152*
Độ dài tuyến (km)	13.75	25.9	9.48	34	22.5	15.55
Số trạm	38	65	59	22	47	28
Nhu cầu	N_{02}	N_{28}	N_{30}	N_{109}	N_{149}	N_{152}

Khi đó, theo đoạn code Python [1], ta tìm ra được các giá trị s_i sau:

Tuyến	02	28	30	109	149	152
Số xe (s_i)	11	17	22	4	12	12

Ngoài ra, tổng thời gian chờ nhỏ nhất của mỗi hành khách trên 6 tuyến là xấp xỉ 10 phút (được tính bằng thương giữa tổng F với tổng số lượt trên số chuyến).

3.2 Tối ưu về chi phí và tiền vốn đầu tư

Bài toán. Thực tế, Thành phố Hồ Chí Minh không chỉ sử dụng một loại xe buýt. Có nhiều loại xe được đề cập để phục vụ người dân. Trong bài viết này, chúng tôi sử dụng k loại xe với k sức chứa khác nhau.

Giả thiết: Nhu cầu của người dân là như nhau tại mọi vị trí trên tuyến đường và số lượng xe phải đáp ứng đủ nhu cầu của người dân.

Input:

- j: số chỗ trên 1 xe buýt (Dùng để phân loại xe buýt. Ví dụ: xe buýt 30 chỗ, 40 chỗ, 50 chỗ, v.v).
- s'_{i*j}: giá tiền của 1 xe buýt có j chỗ ngồi.
- N_i: lượng hành khách trên 1 lộ trình xe buýt của tuyến i.

Output:

- s_{i*j}: số xe buýt có j chỗ trên tuyến i ($i = 1, 2, 3, \ldots, k$).
- P_i: tổng tiền vốn nhỏ nhất để mua xe.

Xét trên tuyến i, tổng sức chứa của xe buýt phải lớn hơn số người N_i đi trên một lộ trình để có thể đáp ứng nhu cầu của người dân. Thế nên, chúng ta có bất phương trình điều kiện:

$$\begin{cases} \Sigma j \cdot s_{i*j} \geq N_i \\ P_i = \Sigma s_{i*j} \cdot s'_{i*j} \text{ là nhỏ nhất} \end{cases}$$

Lưu ý rằng ta sẽ tối ưu trên mỗi tuyến xe buýt, do đó ta sẽ tách bài toán lớn thành k bài toán nhỏ khác nhau. Những cái tổng ta có thể coi như i là cố định và cho j chạy theo chỗ ngồi của các loại xe.

Trên thực tế, sức chứa của bến xe là có hạn. Bến xe của tuyến i chỉ có thể chứa được n xe. Vậy nên

$$\Sigma s_{i*j} \leq n.$$

Ví dụ 2. *Chúng ta muốn tối ưu tiền vốn trên tuyến số* 2 *với nhu cầu trung bình là* 366 *người trên tuyến. Biết sức chứa của bến xe cho tuyến* 2 *là* 12 *xe và*

Loại xe (chỗ)	*Giá xe (tỷ đồng)*
26	*0,86*
35	*1,18*
46	*1,6*

Từ dữ liệu trên, ta có hệ phương trình tuyến tính

$$\begin{cases} 26 \cdot s_{2*26} + 35 \cdot s_{2*35} + 46 \cdot s_{2*46} \geq 366 \\ s_{2*26} + s_{2*35} + s_{2*46} \leq 12 \end{cases}$$

Hàm cần tối ưu

$$0,86 \cdot s_{2*26} + 1,18 \cdot s_{2*35} + 1,6 \cdot s_{2*46}.$$

Và ta cần tìm min của hàm này. Dùng Python [2] giải hệ phương trình tuyến tính trên, có thể tính được

$$[s_{2*26}, s_{2*35}, s_{2*46}] = [6, 6, 0]$$

với $P_2 = 12,24$ tỷ. Ngoài ra, trong thực tế thì xe có x chỗ ngồi thì có thể chứa nhiều người hơn, trung bình thì sẽ chứa khoảng $2x$ người. Do đó hàm của ta còn có thể tối ưu hơn bằng cách nhân vào "hệ số chèn ép". Chẳng hạn,

$$\begin{cases} \Sigma j \cdot s_{i*j} \geq \dfrac{N_i}{2} \\ P_i = \Sigma s_{i*j} \cdot s'_{i*j} \text{ là nhỏ nhất} \end{cases}.$$

3.3 Thay đổi các trạm để tối ưu hóa bài toán dựa trên nhu cầu của người dân

Ở 2 phần trên, ta chỉ xét trong trường hợp số trạm ở mỗi tuyến không đổi và nhu cầu ở các trạm khác nhau là tương đương nhau. Trong hướng tiếp cận này, 2 yếu tố trên sẽ thay đổi theo yêu cầu thực tế. Nhiệm vụ của chúng ta là xác định là số trạm và khoảng cách giữa chúng sao cho phù hợp nhất với thực tế, cụ thể là quãng đường hành khách muốn đi và thời gian dừng tại mỗi chuyến. Sau đó, nhiều khả năng việc phân phối số xe dựa theo 2 hướng trên sẽ tốt hơn và tiết kiệm chi phí hơn.

Input :

- l_{hk} là quãng đường trung bình mà các hành khách đi trên cả tuyến (km)
- t_0: thời gian bình quân dừng tại mỗi điểm (phút)

Output :khoảng cách tối ưu giữa các trạm. Khi đó

$$l_0 = \sqrt{\frac{v_b.l_{hk}.t_0}{30}}$$

Chứng minh Ta gọi:

- t_{b_1}: thời gian đi bộ từ điểm xuất phát (O) tới trạm .
- t_{cd}:thời gian chờ xe buýt trung bình.
- t_{pt}: thời gian di chuyển trên phương tiện.
- t_{b_2}: thời gian từ trạm xuống tới điểm cần tới.
- l_b: quãng đường đi bộ .
- l_t: quãng đường đi bộ đến tuyến giao thông.
- l_d: quãng đường đi bộ dọc theo tuyến giao thông đến điểm dừng (đỗ).
- δ: Mật độ giao thông.
- F: diện tích thành phố.
- L_M: chiều dài mạng lưới giao thông.
- I: khoảng cách chạy xe trên hành trình (phút).
- v_t: tốc độ bình quân của xe.

Khi đó hàm thời gian ta cần tối ưu là

$$T := t_{b_1} + t_{cd} + t_{pt} + t_{b_2}.$$

Xét giả thiết mật độ giao thông đồng đều thì $t_{b_1} = t_{b_2} = t_b$. Khi đó

$$T = 2t_b + t_{cd} + t_{pt}.$$

Mặt khác ta tính được $t_b = \dfrac{60l_b}{v_b} = \dfrac{(l_t + l_d).60}{v_b}$, và theo nghiên cứu, ta có các mối liên hệ giữa các biến như sau:

$$l_t = \frac{1}{3\delta}, \delta = \frac{L_M}{F}, l_d = \frac{l_0}{4}, t_{cd} = \frac{I}{2},$$

$$t_{pt} = \frac{60.l_{hk}}{V_T} + \left(\frac{l_{hk}}{l_0} - 1\right).t_0.$$

Khi đó, thay tất cả các biến vào, ta được

$$T = \frac{40}{\delta.v_b} + \frac{30l_0}{v_b} + \frac{60.l_{hk}}{v_t} + \left(\frac{l_{hk}}{l_0} - 1\right).t_0$$

$$T'(l_0) = \frac{30}{v_b} - \frac{l_{hk}.t_0}{l_0^2}4$$

$$T'(l_0) = 0 \Leftrightarrow l_0 = \sqrt{\frac{v_b.l_{hk}.t_0}{30}}$$

Vậy ta có điều phải chứng minh.

Do đó, khi ta có một tuyến xe buýt cố định, ta có thể điều chỉnh khoảng cách giữa các trạm sao cho thời gian di chuyển của hành khách đến trạm xe là ít nhất. Khi số trạm và vị trí của chúng đã được điều chỉnh, ta có thể tăng thêm độ hiệu quả của các hướng phân phối xe.

4 So sánh và áp dụng thực tế mô hình

Hướng 1: So sánh với mô hình thực tế ở quận 1.
Ta có bảng sau:

Tuyến i	Số trạm $a_i + 1$	Khoảng cách trung bình b giữa hai trạm(km)	Nhu cầu N_i
2	38	0,372	366
28	65	0,405	516
30	59	0,590	623
109	22	0,451	65
149	47	0,489	256
152	38	0,420	420

Theo nghiên cứu thực tế, vận tốc trung bình xe buýt di chuyển trong thành phố là 18,6 km/h. Khi đó mỗi người trong 6 tuyến trên có thời gian chờ trung bình là 10 phút, khá tương đồng so với thực tế ở các trạm trên.

Hướng 2:

$$\begin{cases} s_{2*16} + s_{2*29} + s_{2*35} + s_{2*47} \leq 16 \\ 16s_{2*16} + 29s_{2*29} + 47s_{2*47} + 35s_{2*35} \geq 366 \end{cases}$$

Ta cần tối ưu hàm

$$1,19s_{2*16} + 0,93s_{2*29} + 2,41s_{2*47} + 0,95s_{2*35}$$

Chạy Matlab [3], ta sẽ được

$$s_{2*16} = 0, s_{2*29} = 3, s_{2*35} = 0; s_{2*47} = 8$$

Hướng 3: Ta xét vận tốc đi bộ trung bình là 4 km/h.

Tuyến	Độ dài của tuyến(km)	Chiều dài trung bình đi trên chuyến (km)	Thời gian dừng (phút)	Khoảng cách trung bình thực tế(km)	Khoảng cách tính toán(km)
2	13,75	6	0,8	0,81	0,8
28	25,9	11,2	0,7	1,2	1,02
30	34,2	23	0,5	1,27	1,23
109	9,48	3,9	1	0,7	0,72
149	22,5	8,3	0,5	0,7	0,74
152	15,5	10,4	0,5	0,86	0,83

Ở mô hình 3 khi so sánh với thực tế thì các số khá khít với nhau, tuy nhiên khi xét ở thực tế thì khoảng cách giữa các trạm có thể không đều, do đó ta có thể phân trạm sao cho nhu cầu được tối ưu nhất (có nghĩa là chỗ nào có nhiều người cần thì mình sẽ lập trạm gần chỗ đó). Tuy nhiên vẫn sẽ phải dựa trên khoảng cách tối ưu.

Nhận xét ưu, khuyết điểm của 3 **mô hình:**

- Mô hình thứ nhất: Đầu tiên, nhóm đã giảm thiểu tối đa thời gian chờ xe buýt thông qua việc phân bố số xe hợp lý. Việc phải chờ xe quá lâu chắc chắn là một bất tiện cho hành khách và dần dần họ sẽ tránh việc đi xe buýt. Vì vậy, rút ngắn thời gian chờ của hành khách là một ưu điểm lớn của mô hình. Ngoài ra, do số xe buýt bị giới hạn, ta chắc chắn sẽ tiết kiệm được nhiều chi phí cho việc vận chuyển, chẳng hạn như tiền xăng và tiền lương cho nhân viên. Tuy nhiên, nó có một số nhược điểm cần nêu ra. Thực tế, nhu cầu đi lại thay đổi theo thời gian và vị trí nên nếu sử dụng tất cả số xe được phân bố, ta có thể gặp phải trường hợp không đủ xe hoặc dư xe. Khi đó, ta cần có một cách điều xe để bổ trợ cho mô hình này để nâng cao hiệu quả. Một khuyết điểm cần đưa ra nữa là mô hình này không hoàn toàn đáp ứng được nhu cầu sử dụng xe buýt của người dân.
- Mô hình thứ hai: Ở mô hình này, nhóm đã đáp ứng tất cả nhu cầu đi lại trên các chuyến. Đồng thời, chi phí dành ra cho việc mua xe là nhỏ nhất và giữ cho số lượng xe tổng cộng không quá giới hạn của bến bãi nên ta đã giải quyết được 3 yêu tố quan trọng. Tuy vậy, cách đặt mô hình này có một hạn chế. Nó hoạt động tốt trong điều kiện giao thông lý tưởng nhưng nhiều khả năng gặp trục trặc nếu số lượt khách là quá lớn trong giờ cao điểm. Xe 30 chỗ sẽ khó mà cung cấp đủ chỗ ngồi cho hành khách nên cần có cách lập lịch trình hoạt đồng của từng loại xe trong tuyến để giảm thiểu khả năng xảy ra tình trạng trên.
- Mô hình thứ ba: Mô hình này không giải quyết trục tiếp bài toán phân phối số xe nhưng đó là một tiền đề quan trọng khi đã xác định lại vị trí các trạm. Trong bài toán này, nhóm có xét đến nhu cầu của người dân ở các địa điểm khác nhau, do đó phương án này sẽ giảm thiểu thời gian di chuyển của hành khách đến các trạm dừng. Dù vậy, có một số trường hợp nhu cầu chỉ cao ở một số khu vực, khi đó cần phân bố nhiều trạm hơn ở khu vực này.
- Tóm lại, mỗi mô hình có những ưu và khuyết điểm riêng. Mô hình 1 và 2 có thể bổ trợ cho nhau tạo thành một mô hình mới hoàn chỉnh hơn. Trong khi đó, mô hình 3 sẽ đạt hiệu quả tối đa khi chúng ta xây dựng được mô hình thoả mãn về chi phí vận tải.

5 Lời cảm ơn

Chúng tôi xin chân thành cảm ơn Ban tổ chức PiMA 2017 đã tạo điều kiện thuận lợi nhất cho tất cả các trại sinh đã có được một trại hè toán bổ ích và đầy hứng thú. Nhóm không những học thêm được những kiến thức mới, mà còn tiếp thu được những kĩ năng khác như lập trình, làm việc nhóm cũng như cách chuẩn bị và trình bày một dự án lớn, là những điều ít được giảng dạy trong trường học. Qua thành công của trại trong 2 năm gần nhất, chúng tôi thực sự hy vọng rằng Ban tổ chức sẽ tiếp tục vững bước trên con đường truyền lửa nhiệt huyết và đam mê toán học cho các bạn học sinh trên cả nước. Chúng tôi luôn mong muốn rằng PiMA sẽ còn được tổ chức ở quy mô lớn hơn với chất lượng tốt hơn trong tương lai.

Chúng tôi cũng xin cảm ơn đến những anh chị trong Ban tổ chức, những thầy cô, những người đã giúp đỡ nhóm hoàn thành dự án. Đặc biết, nhóm muốn dành lời cảm ơn sâu sắc nhất cho anh Phan Minh Hoàng, chị Phan Ngọc Tiên, anh Vũ Lê Thế Anh, anh Hoàng Văn Thiên. Anh chị đã theo dõi sát sao và đưa ra những hướng dẫn tận tình, giúp nhóm có được kết quả tốt nhất.

Ngoài ra, nhóm cũng xin gửi lời cảm ơn chân thành đến anh Lê Phúc Lữ, anh Huỳnh Phước Trường và anh Nguyễn Trần Hữu Thịnh đã đóng góp ý kiến để bài báo cáo này được tốt hơn.

6 Tài liệu tham khảo

- http://buyttphcm.com.vn/
- https://buýtmap.vn/
- http://luanvan.net.vn/luan-van/de-tai-nghien-cuu-khao-sat-va-danh-gia-hien-trang-xe-buyt-dang-su-dung-21675/
- http://www.vatgia.com/5052/xe-khach.html
- http://lotrinh.vn
- Optimizing Bus Schedules to Minimize Waiting Time; Steven Kornfeld, Wei Ma and Andrew Resnikof.
- Optimal allocation of vehicles to bus routes using automatically collected data and simulation modelling ; Gabriel E. Sanchez-Martínez, Haris N. Koutsopoulos and Nigel H.M. Wilson.
- Optimization of Bus Route Planning in Urban Computer Networks; Steven I-Jy Chien, Branislav V. Dimitrijevic and Lazar N. Spasovic.
- Bus Network Design Using Genetic Algorithm; Hadi Sadrsadat.
- Bus Route Optimization in Wuhan, China ; Zhang Ning.

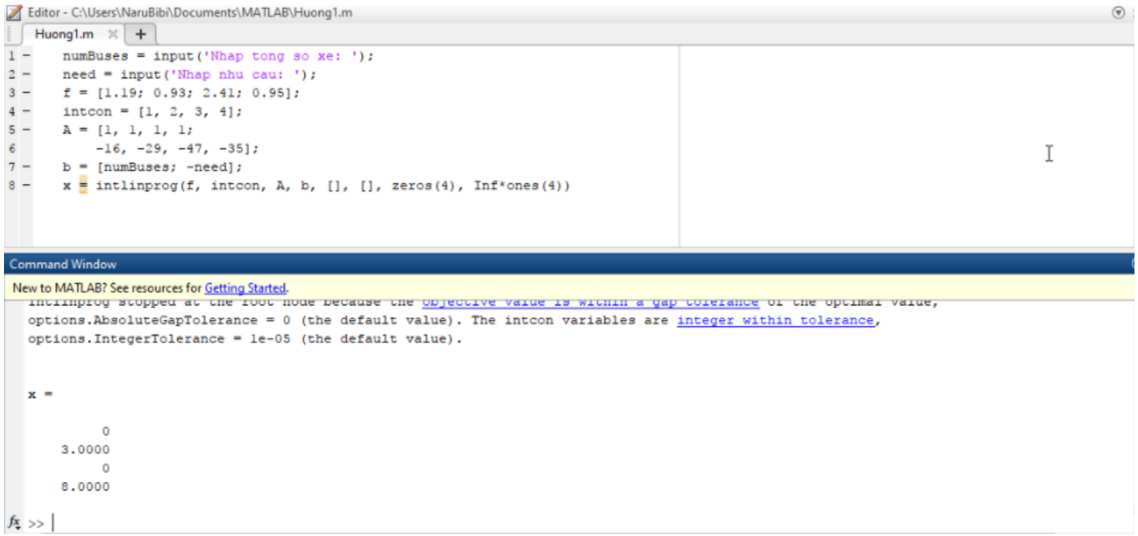
7 Phụ lục

Code Python cho ví dụ và kết quả của hướng 1

```python
def optimize(N, a, b, v, L):
    *** N la nhu cau theo luot, a + 1 la so tram, b la khoang cach giua 2 tram
        v la van toc trung binh xe chay, L la tong so xe duoc cap ***
    numberLine = len(a)
    m = [0]*numberLine
    for i in range(numberLine):
        m[i] = float(2 * a[i] * b[i]) / float(v)
    opt = [[1000000000 for i in range(L+1)] for i in range(numberLine+1)]
    trace = [[0 for i in range(L+1)] for i in range(numberLine+1)]
    opt[0][0] = 0
    for i in range(1, numberLine+1):
        for j in range(1, L+1):
            for k in range(1, j+1):
                if opt[i][j] > (opt[i-1][j-k] + (float(N[i-1]*m[i-1]) / float(k))):
                    opt[i][j] = (opt[i-1][j-k] + (float(N[i-1]*m[i-1]) / float(k)))
                    trace[i][j] = k
    p1 = numberLine
    p2 = L
    s = []
    while (p1>0):
        s.append(trace[p1][p2])
        p2 = p2 - trace[p1][p2]
        p1 = p1 - 1
    s = s[::-1]
    result = []
    result.append(s)
    result.append(opt[numberLine][L])
    return result
```

```python
print("Nhap so chuyen:")
numberLine = int(input())
print("Nhap mang N")
N = [int(i) for i in input().split()]
print("Nhap mang a")
a = [int(i) for i in input().split()]
print("Nhap mang b")
b = [int(i) for i in input().split()]
print("Nhap v")
v = int(input())
print("Nhap L:")
L = int(input())
//Ket qua xuat ra la so xe o moi tuyen va tong thoi gian cho nho nhat
print(optimize(N, a, b, v, L))
```

Sau đây là code Matlab ở ví dụ của hướng 2, ta có thể làm tương tự cho trường hợp tổng quát


Editor - C:\Users\NaruBibi\Documents\MATLAB\Huong1.m

Huong1.m

```
numBuses = input('Nhap tong so xe: ');
need = input('Nhap nhu cau: ');
f = [1.19; 0.93; 2.41; 0.95];
intcon = [1, 2, 3, 4];
A = [1, 1, 1, 1;
    -16, -29, -47, -35];
b = [numBuses; -need];
x = intlinprog(f, intcon, A, b, [], [], zeros(4), Inf*ones(4))
```

Command Window

New to MATLAB? See resources for Getting Started.

```
intlinprog stopped at the root node because the objective value is within a gap tolerance of the optimal value,
options.AbsoluteGapTolerance = 0 (the default value). The intcon variables are integer within tolerance,
options.IntegerTolerance = 1e-05 (the default value).


x =

         0
    3.0000
         0
    8.0000

>>
```