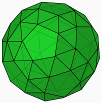

GIẢI TÍCH MỘT BIẾN

PiMA 2019: The Mathematics of Deep Learning

Ngày 31 tháng 7 năm 2019

Mục lục

1. Giới hạn hàm số. Tính liên tục của hàm số.

2. Đạo hàm và ứng dụng

3. Nguyên hàm và tích phân

Giới hạn hàm số. Tính liên tục của hàm số.

Giới hạn hàm số tại một điểm

Cho $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, một hàm số thực $f : A \to \mathbb{R}$ và $a \in A^*$. Ta nói: f có giới hạn là $L \in \mathbb{R}$ tại a khi và chỉ khi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta_\epsilon.$$

Ký hiệu: $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Giới hạn một bên

- Ta nói: f có *giới hạn bên phải* là $L \in \mathbb{R}$ tại a khi và chỉ khi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in A : 0 < x - a < \delta_\epsilon.$$

  Ký hiệu: $\lim_{x \to a^+} f(x) = L$.

- Ta nói: f có *giới hạn bên trái* là $L \in \mathbb{R}$ tại a khi và chỉ khi

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in A : 0 < a - x < \delta_\epsilon.$$

  Ký hiệu: $\lim_{x \to a^-} f(x) = L$.

Giới hạn hàm số tại vô cùng

Cho một hàm số thực f xác định trên $(x_0, +\infty)$. Ta nói: f có giới hạn là $L \in \mathbb{R}$ tại $+\infty$ khi và chỉ khi

$$\forall \epsilon > 0, \exists M_\epsilon > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x > M_\epsilon.$$

Ký hiệu: $\lim_{x \to \infty} f(x) = L$.

Một cách tương tự, ta định nghĩa được các khái niệm: giới hạn hàm số tại $-\infty$, giới hạn vô cùng tại một điểm, giới hạn vô cùng tại vô cùng.

Tính chất

Giả sử $\lim_{x\to a} f(x) = L_1 \in \mathbb{R}$ và $\lim_{x\to a} g(x) = L_2 \in \mathbb{R}$. Khi đó:

- $\lim_{x\to a}(\alpha f(x)) = \alpha L_1, \forall \alpha \in \mathbb{R}$;
- $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L_1 + L_2$;
- $\lim_{x\to a}[f(x).g(x)] = L_1.L_2$;
- $\lim_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{L_1}{L_2}$ (điều kiện: $L_2 \neq 0$).

Ta cũng có các kết quả tương tự khi thay $\lim_{x\to a} f(x)$ bằng $\lim_{x\to a^+} f(x)$, $\lim_{x\to a^-} f(x)$, $\lim_{x\to\infty} f(x)$ hoặc $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

Giới hạn hàm số

Định lý

Cho $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$, $a \in A^*$ và ba hàm số thực f, g, h xác định trên A. Giả sử:

$$f(x) \le g(x) \le h(x) \ \forall x \in A$$

và $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L \in \mathbb{R}$.
Khi đó $\lim_{x\to a} g(x)$ xác định và $\lim_{x\to a} g(x) = L$.

Định lý

Cho $a \in \mathbb{R}$ và f là một hàm số thực xác định trên một lân cận của a. Khi đó: $\lim_{x\to a} f(x)$ xác định khi và chỉ khi $\lim_{x\to a^-} f(x)$ và $\lim_{x\to a^+}$ xác định và bằng nhau. Trường hợp $\lim_{x\to a} f(x)$ xác định thì:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x).$$

Hàm số liên tục

Hàm số liên tục tại một điểm

Cho $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}, a \in A \cap A^*$ và một hàm số thực f xác định trên A. Hàm số f **liên tục** tại a khi và chỉ khi

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Hàm số liên tục trên một tập hợp

Cho tập $\varnothing \neq A \subset \mathbb{R}$. Hàm số thực $f : A \to \mathbb{R}$ được gọi là liên tục trên A khi và chỉ khi f liên tục tại mọi $x \in A$.

Định lý

Mọi hàm số sơ cấp đều liên tục tại mọi điểm mà chúng xác định tại đó.

Hàm số liên tục

Định lý

Giả sử f là hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a) \neq f(b)$. Khi đó, với mọi số N nằm giữa $f(a)$ và $f(b)$, tồn tại một số $c_N \in (a,b)$ sao cho $f(c_N) = N$.

Hệ quả

Giả sử hàm số thực f liên tục trên đoạn $[a,b]$ và $f(a)f(b) < 0$. Khi đó, phương trình $f(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên (a,b).

Định lý

Giả sử hàm số thực f liên tục trên đoạn $[a,b]$. Khi đó f có giá trị lớn nhất M và giá trị nhỏ nhất m trên đoạn $[a,b]$ và $f([a,b]) = [m,M]$.

Đạo hàm và ứng dụng

Đạo hàm của hàm số tại một điểm

Cho $a \in \mathbb{R}$ và một hàm số thực f xác định trên một lân cận của a. Ta nói f **có đạo hàm tại** a nếu giới hạn

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

tồn tại và là một số thực. Khi đó, ký hiệu giới hạn trên là **f'(x)** và gọi là đạo hàm của hàm số tại x.

Hàm số $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ được gọi là có đạo hàm trên (a,b) khi nó có đạo hàm tại mọi điểm thuộc (a,b).

Đạo hàm

Tương tự với khái niệm giới hạn hàm số, ta cũng có các khái niệm đạo hàm bên trái, đạo hàm bên phải của hàm số tại một điểm.

Đạo hàm hai phía

Các giới hạn sau (nếu tồn tại):

$$\lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}, \quad \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

lần lượt được gọi là **đạo hàm bên phải**, **đạo hàm bên trái** của f tại điểm a.

Định lý

Hàm số f có đạo hàm (khả vi) tại a khi và chỉ khi đạo hàm bên trái và đạo hàm bên phải của f tại a đều tồn tại và bằng nhau.

Tính chất

Cho f và g là các hàm số thực khả vi trên (a,b) và $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Ta có các tính chất sau:

- Hàm $(\alpha f + \beta g)$ khả vi trên (a,b) và
$$(\alpha f + \beta g)'(x) = \alpha f'(x) + \beta g'(x), \forall x \in (a,b).$$
- Hàm fg khả vi trên (a,b) và
$$((fg)(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \forall x \in (a,b).$$
- Nếu $f(x) \neq 0, \forall x \in (a,b)$ thì hàm $\frac{1}{f}$ khả vi trên (a,b) và
$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x) = -\frac{f'(x)}{f(x)^2}, \forall x \in (a,b).$$

Đạo hàm

Định lý hàm số hợp

Cho $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ và $g:(c,d)\to\mathbb{R}$ sao cho $f(a,b)\subset(c,d)$. Giả sử f khả vi trên (a,b) và g khả vi trên (c,d). Khi đó hàm số hợp: $g\circ f:(a,b)\to\mathbb{R}$ cũng khả vi trên (a,b) và

$$(g\circ f)'(x)=g'(f(x))f'(x), \forall x\in(a,b).$$

Định lý ánh xạ ngược

Cho $f:(a,b)\to(c,d)$ là song ánh và khả vi trên (a,b). Khi đó hàm ngược $f^{-1}:(c,d)\to(a,b)$ khả vi trên (c,d) và

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(f^{-1}(y))}, \forall y\in(c,d).$$

Định lý Rolle

Cho f là hàm số thực liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Giả sử $f(a) = f(b)$. Khi đó, có một số thực $c \in (a,b)$ sao cho $f'(c) = 0$.

Định lý Lagrange

Cho f là hàm số thực liên tục trên $[a,b]$ và khả vi trên (a,b). Khi đó, có một số thực $c \in (a,b)$ sao cho

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Xem thêm: Định lý Cauchy, L'Hopital.

Ứng dụng của đạo hàm

1. Khảo sát sự biến thiên của hàm số

Định lý

Cho hàm số thực f liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a, b).

- Nếu $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a,b)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thì f đồng biến trên $[a,b]$.
- Nếu $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a,b)$ và dấu bằng xảy ra tại hữu hạn điểm thì f nghịch biến trên $[a,b]$.

2. Tìm cực trị của hàm số

Cực trị

Cho một hàm số thực $f: A \to \mathbb{R}$ và một số thực $c \in A$. Ta nói:

- f đạt cực đại tại c khi và chỉ khi có một số $\epsilon > 0$ sao cho:

$$f(x) \leq f(c), \forall x \in A : x \in (c - \epsilon, c + \epsilon).$$

- f đạt cực tiểu tại c khi và chỉ khi có một số $\epsilon > 0$ sao cho:

$$f(x) \geq f(c), \forall x \in A : x \in (c - \epsilon, c + \epsilon).$$

Điểm c thỏa mãn một trong hai tính chất trên được gọi là **cực trị địa phương** của f.

Ứng dụng của đạo hàm

Định lý

Cho hàm số thực $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ và khả vi trên (a,b). Nếu $c\in(a,b)$ là cực trị địa phương của f thì $f'(c)=0$.

Chú ý

Nếu $f:(a,b)\to\mathbb{R}$, f khả vi trên (a,b) và $d\in(a,b)$ thỏa $f'(d)=0$, thì ta chưa thể kết luận d có phải cực trị của f hay không.

Định lý

- Nếu có một khoảng $(c-\delta,c+\delta)\subset(a,b)$ sao cho $f'(x)>0,\forall c-\delta<x<c$ và $f'(x)<0,\forall c<x<c+\delta$ thì c là cực đại địa phương của f.
- Ngược lại, nếu $f'(x)<0,\forall c-\delta<x<c$ và $f'(x)>0,\forall c<x<c+\delta$ thì c là cực tiểu địa phương của f.

3. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của hàm số trên khoảng đóng $[a, b]$.

Nhắc lại

Hàm số $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$ thì đạt giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất trên $[a, b]$.

Nhận xét

Nếu $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ và f đạt giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) tại $c \in (a, b)$ thì c cũng là cực trị địa phương của f.

Từ những điều trên, ta có phương pháp tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ liên tục trên $[a, b]$, khả vi trên (a, b).

Ứng dụng của đạo hàm

Tìm giá trị lớn nhất, nhỏ nhất của hàm số thực f liên tục trên $[a,b]$, khả vi trên (a,b):

- Tìm tất cả điểm dừng thuộc (a,b), tức là các điểm $x \in (a,b)$ có tính chất $f'(x) = 0$.
- Giả sử tập hợp các điểm dừng thuộc (a,b) là $x_1, \ldots, x_n$. So sánh các giá trị $f(a), f(x_1), \ldots, f(x_n), f(b)$, ta có:

$$\min_{x \in [a,b]} f(x) = \min\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)\};$$

$$\max_{x \in [a,b]} f(x) = \max\{f(a), f(b), f(x_1), \ldots, f(x_n)\}.$$

Nguyên hàm và tích phân

Định nghĩa

Định lý

Hàm số thực liên tục trên $[a, b]$ thì khả tích trên $[a, b]$.

Tính chất

Cho f, g là các hàm số thực liên tục trên $[a, b]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ và $c \in (a, b)$. Ta có:

- f và $\alpha f + \beta g$ khả tích trên $[a, b]$;
- $\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x) = \alpha \int_a^b f(x)\,dx + \beta \int_a^b g(x)\,dx$;
- $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$;
- $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
- Nếu $f(x) \leq g(x) \forall x \in (a, b)$ thì $\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$.

Định lý cơ bản của giải tích

Giả sử f là hàm số liên tục trên đoạn $[a,b]$.

1. Hàm số g định bởi

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt \quad \forall x \in [a,b]$$

   liên tục trên $[a,b]$, có đạo hàm trên (a,b) và $g'(x) = f(x)$.

2. Nếu F là nguyên hàm bất kì của f, tức là $F' = f$, thì

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Tích phân bất định

Nguyên hàm

Ký hiệu $\int f(x)\,dx$ chỉ nguyên hàm bất kì, theo biến x, của hàm f.
Ký hiệu trên còn được gọi là **tích phân bất định** của f.

Định lý

Hai nguyên hàm của f sai khác nhau một hằng số. Nghĩa là, nếu F và G cùng là nguyên hàm của f thì có số thực c sao cho $F = G + c$.

Hai quy tắc tính nguyên hàm và tích phân

1. Quy tắc đổi biến

- Nếu g là hàm khả vi, miền giá trị của g là một khoảng, f liên tục trên khoảng này, thì

$$\int f[g(x)]g'(x)\,dx = \int f(u)\,du.$$

- Nếu g' liên tục trên $[a,b]$ và f liên tục trên miền giá trị của g, thì

$$\int_a^b f[g(x)]g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Hai quy tắc tính nguyên hàm và tích phân

2. Quy tắc tích phân từng phần

- Nếu f và g là hai hàm số có đạo hàm thì

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx.$$

- Nếu hai đạo hàm f' và g' liên tục trên $[a, b]$ thì

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Tích phân suy rộng loại I

Tích phân dạng $\int_a^\infty f(x)\,dx$

Nếu $\int_a^t f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \geq a$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ hội tụ và

$$\int_a^\infty f(x)\,dx = \lim_{t\to\infty} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Nếu giới hạn nói trên không tồn tại, ta nói tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^\infty f(x)\,dx$ phân kỳ.

Tương tự, ta định nghĩa được tích phân dạng $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(x)\,dx$.

Tích phân suy rộng loại I

Tích phân dạng $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$

Nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_{a}^{\infty} f(x)\,dx$ và $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ tụ, đồng thời ký hiệu

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{a}^{\infty} f(x)\,dx + \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx.$$

Nếu một trong hai tích phân nói trên phân kỳ thì ta nói tích phân $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ phân kỳ.

Tích phân suy rộng loại II

Tích phân dạng $\int_a^b f(x)\,dx$ với f xác định trên [a, b)

Nếu $\int_a^t f(x)\,dx$ tồn tại với mọi $t \in [a, b)$ và tồn tại giới hạn $\lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx$ như là một số thực hữu hạn, thì ta nói tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{t\to b^-} \int_a^t f(x)\,dx.$$

Nếu giới hạn trên không tồn tại thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ.

Tương tự, ta định nghĩa được tích phân $\displaystyle\int_c^d g(x)\,dx$ với g xác định trên $(c, d]$.

Tích phân dạng $\int_a^b f(x)\,dx$ với f xác định trên (a,b)

Với c thuộc (a,b) bất kì, nếu cả hai tích phân suy rộng $\int_a^c f(x)\,dx$ và $\int_c^b f(x)\,dx$ cùng hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ và

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx.$$

Nếu một trong hai tích phân trên phân kỳ thì ta nói tích phân $\int_a^b f(x)\,dx$ phân kỳ.

Tích phân dạng $\int_a^b f(x)\,dx$ với f xác định trên $[a,c) \cap (c,b]$

Nếu cả hai tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx$ và $\displaystyle\int_c^b f(x)\,dx$ hội tụ thì ta nói tích phân suy rộng $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ hội tụ.

Tài liệu tham khảo