

Xác suất và biến cố, biến ngẫu nhiên

Nguyen Nguyen

Ngày 31 tháng 7 năm 2019

Outline

- 1 Xác suất và biến cố
 - Phép thử ngẫu nhiên
 - Biến cố
 - Không gian mẫu
- 2 Phép toán trên biến cố
 - Xác suất của biến cố
 - Biến cố độc lập - Công thức nhân
 - Bài tập
- 3 Biến ngẫu nhiên
 - Khái niệm
 - Phân loại

Phép thử ngẫu nhiên

Định nghĩa (Phép thử ngẫu nhiên)

Phép thử ngẫu nhiên là việc thực hiện một hành động và quan sát kết quả của nó. Kết quả của phép thử ngẫu nhiên là không thể đoán trước được nhưng ta có thể xác định được tập hợp các kết quả của nó.

Ví dụ

Các phép thử sau đây là phép thử ngẫu nhiên:

Ví dụ

Các phép thử sau đây là phép thử ngẫu nhiên:

- Mặt trên của một đồng xu khi ta tung ngẫu nhiên.

Ví dụ

Các phép thử sau đây là phép thử ngẫu nhiên:

- Mặt trên của một đồng xu khi ta tung ngẫu nhiên.
- Mặt trên của một con xúc xắc khi ta thả ngẫu nhiên.

Ví dụ

Các phép thử sau đây là phép thử ngẫu nhiên:

- Mặt trên của một đồng xu khi ta tung ngẫu nhiên.
- Mặt trên của một con xúc xắc khi ta thả ngẫu nhiên.
- Số xe chạy qua một trạm thu phí trong một ngày bất kỳ.

Ví dụ

Các phép thử sau đây là phép thử ngẫu nhiên:

- Mặt trên của một đồng xu khi ta tung ngẫu nhiên.
- Mặt trên của một con xúc xắc khi ta thả ngẫu nhiên.
- Số xe chạy qua một trạm thu phí trong một ngày bất kỳ.
- Việc biến mất của bản thân sau cái búng tay của Thanos.

Ví dụ

Các phép thử sau đây không là phép thử ngẫu nhiên:

Ví dụ

Các phép thử sau đây không là phép thử ngẫu nhiên:

- Màu của quỳ tím khi bỏ vào một dung dịch có pH trong khoảng $[1,7]$.

Ví dụ

Các phép thử sau đây không là phép thử ngẫu nhiên:

- Màu của quỳ tím khi bỏ vào một dung dịch có pH trong khoảng $[1,7]$.
- Đọc đơn của một bạn trại sinh bất kỳ và quyết định cho bạn đây là đậu hay rớt.

Biến cố

Định nghĩa (Biến cố)

*Một biến cố là một tập hợp các kết quả có thể quan sát được của phép thử. Một biến cố có một phần tử gọi là **biến cố sơ cấp**. Một biến cố có từ hai phần tử trở lên gọi là **biến cố phức hợp**.*

Ví dụ

Xét phép thử tung một con xúc xắc:

- Biến cố sơ cấp: Các mặt 1, 2, 3, 4, 5, 6
- Biến cố phức hợp: $\{1, 2, 3\}$, $\{2, 4, 6\}$, ...

Không gian mẫu

Định nghĩa (Không gian mẫu)

Không gian mẫu là tập hợp hợp thành từ tất cả các biến cố sơ cấp. Kí hiệu là Ω .

Biến cố tương ứng với Ω gọi là **biến cố chắc chắn**. Biến cố ứng với \emptyset là **biến cố rỗng**.

Nhận xét

- Mọi biến cố đều là tập con của biến cố chắc chắn.
- Biến cố rỗng là tập con của mọi biến cố.

Ví dụ

Các phép thử có không gian mẫu là một tập hợp hữu hạn:

- Phép thử tung xúc xắc: $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Phép thử tung đồng xu: $\Omega = \{\text{sấp}, \text{ngửa}\}$

Ví dụ

Các phép thử có không gian mẫu là một tập hợp vô hạn:

- Vô hạn đếm được: Chọn một điểm nguyên bất kỳ trên mặt phẳng tọa độ.
- Vô hạn không đếm được: Chọn một điểm bất kỳ trong mặt phẳng tọa độ.

Nhận xét: Vì bản chất các biến cố là các tập hợp, nên các phép toán trên biến cố cũng thực chất là thực hiện các phép toán trên các tập hợp.

Định nghĩa

Định nghĩa

- Phép hợp (cộng): $A \cup B \equiv A + B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$

Định nghĩa

- Phép hợp (cộng): $A \cup B \equiv A + B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$
- Phép giao (nhân): $A \cap B \equiv AB = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$. Nếu $AB = \emptyset$ thì A, B gọi là hai biến cố xung khắc.

Định nghĩa

- Phép hợp (cộng): $A \cup B \equiv A + B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$
- Phép giao (nhân): $A \cap B \equiv AB = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$. Nếu $AB = \emptyset$ thì A, B gọi là hai biến cố xung khắc.
- Phép trừ (hiệu): $A - B = \{\omega \in A \wedge \omega \notin B\}$

Định nghĩa

- Phép hợp (cộng): $A \cup B \equiv A + B = \{\omega : \omega \in A \vee \omega \in B\}$
- Phép giao (nhân): $A \cap B \equiv AB = \{\omega : \omega \in A \wedge \omega \in B\}$. Nếu $AB = \emptyset$ thì A, B gọi là hai biến cố xung khắc.
- Phép trừ (hiệu): $A - B = \{\omega \in A \wedge \omega \notin B\}$
- Phép đối: $A^C \equiv \bar{A} = \{\omega \notin A\}$

Tính chất

Với mọi biến cố A, B, C trong cùng một không gian mẫu, ta có:

- Giao hoán: $A + B = B + A$ và $AB = BA$.
- Kết hợp: $A + (B + C) = (A + B) + C$, $(AB)C = A(BC)$.
- De Morgan: $\overline{A + B} = \overline{A} \overline{B}$, $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$.

Định nghĩa

Định nghĩa (Xác suất)

Lặp lại một phép thử vô hạn lần. Với mỗi $n \in \mathbb{N}$ và biến cố A , gọi $\sigma(A, n)$ là số lần biến cố A xảy ra trong n lần thử đầu tiên. Ta thừa nhận giới hạn sau tồn tại:

$$P(A) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sigma(A, n)}{n}$$

Giá trị $P(A)$ là khả năng xảy ra của biến cố A , và được gọi là xác suất của biến cố A .

Tính chất

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$

Tính chất

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

Tính chất

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- (Hệ quả): $P(A + B) \leq P(A) + P(B).$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, B xung khắc.

Tính chất

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- (Hệ quả): $P(A + B) \leq P(A) + P(B).$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, B xung khắc.
- $P(B) \leq P(A)$ với mọi $B \subseteq A.$

Tính chất

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- (Hệ quả): $P(A + B) \leq P(A) + P(B).$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, B xung khắc.
- $P(B) \leq P(A)$ với mọi $B \subseteq A.$
- $P(A + B + C) =$
 $P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC).$

Tính chất

- $P(\Omega) = 1, P(\emptyset) = 0.$
- $P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB)$
- (Hệ quả): $P(A + B) \leq P(A) + P(B).$ Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A, B xung khắc.
- $P(B) \leq P(A)$ với mọi $B \subseteq A.$
- $P(A + B + C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(CA) + P(ABC).$
- Union Bound: $P(A_1 + A_2 + \dots + A_n) \leq P(A_1) + \dots + P(A_n)..$
Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A_i đôi một xung khắc.

Ví dụ

Ví dụ

Tính xác suất để xác suất thấy con xúc xắc ra mặt chẵn là bao nhiêu nếu?

- Các $P(i)$ là bằng nhau?
- $P(1) = 20\%$, $P(2) = P(5) = 15\%$, $P(3) = 30\%$, $P(4) = P(6) = 10\%$

Hệ biến cố đầy đủ

Một hệ hữu hạn các biến cố $\{A_1, \dots, A_n\}$ được gọi là **đầy đủ** nếu:

- A_i đôi một xung khắc.
- $A_1 + \dots + A_n = \Omega$.

Tính chất

Với mọi hệ biến cố đầy đủ B_1, B_2, \dots, B_n và một biến cố A bất kỳ, ta có:

- $AB_1 + AB_2 + \dots + AB_n = A$.
- $P(B_1) + P(B_2) + \dots + P(B_n) = 1$.
- $P(AB_1) + P(AB_2) + \dots + P(AB_n) = P(A)$.
- $P(B) + P(\bar{B}) = 1$. $P(AB) + P(A\bar{B}) = P(A)$.

Định nghĩa

Định nghĩa

Hai biến cố A, B được coi là độc lập với nhau nếu sự xảy ra của biến cố này không ảnh hưởng đến biến cố kia.

Trên thực tế, biến cố xét trên hai phép thử độc lập nhau thì hiển nhiên độc lập nhau.

Công thức nhân xác suất

Định nghĩa (Công thức nhân)

Hai biến cố A, B được coi là độc lập nhau nếu và chỉ nếu

$$P(AB) = P(A)P(B)$$

Định nghĩa (Biến ngẫu nhiên)

Biến ngẫu nhiên là một hàm thực hiện ánh xạ từ không gian mẫu S vào tập hợp các số thực \mathbb{R} .

Ví dụ

Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Định nghĩa

Là biến ngẫu nhiên có miền giá trị chỉ nhận hai giá trị 0, 1.

Một số ví dụ khác

- Biến ngẫu nhiên X là pH của một dung dịch chưa biết nồng độ.
- Biến ngẫu nhiên X là số từ "nhá" mà bà tân Vlog nói trong một clip trên Youtube.

Biến ngẫu nhiên có thể phân loại theo đặc tính của nó như sau:

- Đếm được: Nếu biến ngẫu nhiên có tập giá trị là hữu hạn hoặc vô hạn đếm được.
- Liên tục: Nếu miền giá trị là một đoạn liên tục trên trục số (hoặc tập hợp rời các đoạn như vậy), và không có giá trị nào cho xác suất bằng 0.

Ví dụ