Không gian vector - cơ sở
(Vector space - basis)

PiMA 2019

Phuc H. Lam

17/07/2019

Nội dung

Quan hệ tuyến tính

Tổ hợp tuyến tính

Tổ hợp tuyến tính

Vector $\vec{v}$ là một **tổ hợp tuyến tính** của các vector $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in S$ nếu tồn tại $c_1, c_2, \ldots, c_n \in R$ sao cho

$$\vec{v} = \sum_{k=1}^{n} c_k \vec{v}_k$$

Ta nói $\vec{v}$ biểu diễn tuyến tính được qua S trên R.

Tổ hợp tuyến tính (Linear combination)

Ví dụ 1

Với $S(n) = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$, bất kỳ đa thức $P(x)$ hệ số thực có bậc $degP \leq n$ biểu diễn tuyến tính được qua S trên R:

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

Ví dụ 2

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times k} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ \vec{v}_1 & \vec{v}_2 & \ldots & \vec{v}_k \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \end{bmatrix}$ và $x = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \cdots & c_k \end{bmatrix}^T \in \mathbb{R}^k$.

Khi đó

$$A\vec{x} = \sum_{i=1}^{k} c_i \vec{v}_i$$

Phép nhân ma trận với một vector $\leftrightarrow$ tổ hợp tuyến tính của các cột của ma trận đó.

Tập sinh

Tập sinh (Spanning set)

Tập sinh Span(S) của S là tất cả các tổ hợp tuyến tính có thể của *hữu hạn* các vector trong S:

$$\text{Span}(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{n} c_i \vec{v}_i \mid \quad \vec{v}_i \in S, c_i \in \mathbb{R} \; \forall i = 1, 2, \ldots, n \right\}$$

Tập sinh

Ví dụ 1

Với $S(n)$ như trên, $\text{Span}(S(n))$ là tập hợp tất cả các đa thức có bậc không vượt quá n.

Với $S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n, x^{n+1}, \ldots\}$, $\text{Span}(S)$ là tập hợp tất cả các đa thức hệ số thực.

Ví dụ 2

Gọi C_A là tập hợp các vector cột của ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times k}$, khi đó

$$\text{Span}(C_A) = \{A\vec{x} \mid \quad \vec{x}^T \in \mathbb{R}^k\}$$

Phụ thuộc tuyến tính

Phụ thuộc tuyến tính (Linear dependence)

- Các vector $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ được gọi là **phụ thuộc tuyến tính** nếu $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ *không đồng thời bằng* 0 sao cho

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

- Các vector $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ được gọi là **độc lập tuyến tính** nếu $\forall c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \vec{v}_k = \vec{0} \Leftrightarrow c_k = 0 \; \forall k = 1, 2, \ldots, n$$

Ví dụ 3

- $\{(1,2,0), (-1,1,0), (0,6,0)\}$ phụ thuộc tuyến tính, vì $2 \cdot (1,2,0) + 2 \cdot (-1,1,0) - (0,6,0) = (0,0,0)$.
- $\{(1,0), (0,1)\}$ độc lập tuyến tính.

Phụ thuộc tuyến tính

Cho $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$.

Nhận xét 1: S phụ thuộc tuyến tính $\Leftrightarrow$ tồn tại 1 vector $\vec{v}_i$ biểu diễn tuyến tính được qua những vector còn lại.

Nhận xét 2: S độc lập tuyến tính $\Leftrightarrow$ các vector trong Span(S) có biểu diễn tuyến tính duy nhất qua S.

Không gian con của $\mathbb{R}^n$

Không gian con của $\mathbb{R}^n$

Không gian con của $\mathbb{R}^n$ (Subspace)

$V \subset \mathbb{R}^n$ là **không gian con** của $\mathbb{R}^n$ nếu V thoả:

1. $\vec{0} \in V$
2. $\vec{v} \in V, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\vec{v} \in V$
3. $\vec{v}, \vec{w} \in V \Rightarrow \vec{v} + \vec{w} \in V$

Ví dụ 4

- Mặt phẳng $(D_1) : x - y + z = 0$ là không gian con của $\mathbb{R}^3$. (Có thể kiểm chứng)
- Mặt phẳng $(D_2) : x - y + z = 2$ *không phải* là không gian con của $\mathbb{R}^3$, vì $(0, 0, 0) \notin (D_2)$.

Không gian con của $\mathbb{R}^n$

Phần bù trực giao (orthogonal complement)

Cho V là không gian con của $\mathbb{R}^n$. **Phần bù trực giao** $V^\perp$ của V được xác định như sau:

$$V^\perp = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^n : \vec{x} \cdot \vec{v} = 0 \; \forall \vec{v} \in V\}$$

$V^\perp$ là không gian con của $\mathbb{R}^n$.

Lưu ý: $\boxed{(V^\perp)^\perp = V}$

Không gian trực giao (Orthogonal subspaces)

2 không gian con V, W của $\mathbb{R}^n$ được gọi là **trực giao** nếu

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = 0 \; \forall \vec{v} \in V, \vec{w} \in W$$

Không gian vector, cơ sở và chiều

Không gian vector

Không gian vector (Vector space)

Không gian vector V trên trường $\mathbb{R}$ là một tập hợp, với 2 phép tính: cộng vector $(+)$ và nhân vector với một số thực $(\cdot)$, sao cho $\forall \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in V, c, d \in \mathbb{R}$, ta có các tính chất:

1. Giao hoán của phép cộng: $\vec{u} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{u}$
2. Kết hợp của phép cộng: $(\vec{u} + \vec{v}) + \vec{w} = \vec{u} + (\vec{v} + \vec{w})$
3. Tồn tại vector 'không' $\vec{0} \in V : \vec{0} + \vec{u} = \vec{u} + \vec{0}$
4. Tồn tại vector đối $-\vec{u} \in V : (-\vec{u}) + \vec{u} = 0$
5. Nhân kết hợp với số thực : $c(d\vec{u}) = (cd)\vec{u}$
6. Phân phối của phép nhân với phép cộng: $c(\vec{u} + \vec{v}) = c\vec{u} + c\vec{v}$
7. Phân phối của phép cộng với phép nhân: $(c + d)\vec{u} = c\vec{u} + d\vec{u}$
8. Phép nhân với $1 \in \mathbb{R} : 1\vec{u} = \vec{u}$

Ví dụ cho không gian vector

- Tập hợp các ma trận $m \times n$, với phép cộng và nhân vô hướng ma trận.
- Tập hợp các đa thức hệ số thực, với phép cộng đa thức và nhân đa thức với một số thực.

Không gian con

Không gian con của không gian vector (Subspace)

Cho không gian vector V trên trường $\mathbb{R}$. $U \subset V$ được gọi là **không gian con** của V nếu U thoả:

1. $\vec{0} \in U$
2. $\vec{v} \in V, c \in \mathbb{R} \Rightarrow c\vec{v} \in U$
3. $\vec{u}, \vec{v} \in U \Rightarrow \vec{u} + \vec{v} \in U$

Nhận xét: Span$(U) \subset V$

Cơ sở

Cơ sở (basis)

Cho không gian vector V với U là không gian con. Một **cơ sở** của U là một tập hợp $S \subset U$ thoả:

- Các vector trong S độc lập tuyến tính với nhau.
- $\text{Span}(S) = U$

Biểu diễn trong cơ sở

Cho không gian vector U, có $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$ là một cơ sở hữu hạn. Với $\vec{u} \in U$, ký hiệu $[\vec{u}]_S$ là **biểu diễn của $\vec{u}$ qua cơ sở** S, với

$$[\vec{u}]_S = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{bmatrix}$$

là một vector trong $\mathbb{R}^n$ thoả

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} x_i \vec{u}_i$$

Cơ sở

Ví dụ 5

Trong $\mathbb{R}^2$, $(u_1, u_2) = \dfrac{2u_2 - u_1}{3}(1, 2) + \dfrac{2u_1 - u_2}{3}(2, 1)$, và $S = \{(1, 2), (2, 1)\}$ độc lập tuyến tính, nên S là một cơ sở cho $\mathbb{R}^2$.

Với vector $\vec{u} = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2$, ta có:

$$[\vec{u}]_S = \left(\frac{2u_2 - u_1}{3}, \frac{2u_1 - u_2}{3}\right)$$

Từ ví dụ trên $\rightarrow$ một không gian như $\mathbb{R}^n$ có thể có vô số cơ sở.

Cơ sở

Cơ sở chính quy (Standard basis)

Trong không gian $\mathbb{R}^n$, **hệ cơ sở chính quy** gồm các vector

$$S_n = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \ldots, \vec{e}_n\},$$

với $\vec{e}_k = (0, 0, \ldots, 1, \ldots, 0)$ (số 1 nằm ở vị trí thứ k)

Như vậy, với vector $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, ta có:

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{n} u_i \vec{e}_i \Rightarrow \vec{u} \equiv [\vec{u}]_{S_n}$$

Cơ sở

Các tính chất của cơ sở

Cho U là một không gian vector.

- S là một cơ sở của $U \Rightarrow \forall \vec{u} \in U$, tồn tại **duy nhất một** cách biểu diễn $\vec{u}$ dưới dạng tổ hợp tuyến tính của hữu hạn các vector trong S.
- S_1, S_2 là các cơ sở hữu hạn khác nhau của $U \Rightarrow S_1, S_2$ có cùng số phần tử.

Từ tính chất thứ 2 $\rightarrow$ định nghĩa **chiều**.

Chiều

Chiều của một không gian vector (Dimension)

Cho không gian vector V có không gian con U. Nếu U có một cơ sở hữu hạn S, thì **số chiều** $\dim(U)$ của U là số phần tử của S:

$$\dim(U) = |S|$$

Quy ước: $\dim\{\vec{0}\} = 0$

Tính chất

- $\dim(\mathbb{R}^n) = n$ (xét hệ có sở chính quy)
- U là không gian con của V có số chiều hữu hạn $\Rightarrow \dim(U) \leq \dim(V)$;
  Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow U = V$
- Tập hợp gồm $k > \dim(V)$ vector bất kỳ trong V thì phụ thuộc tuyến tính.

Chiều

Lưu ý: Cho V là một không gian con, với $\dim V = n$ và $S = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. Khi đó:

$$\begin{aligned} &S \text{ là một cơ sở của } V \\ \Leftrightarrow\ &S \text{ độc lập tuyến tính} \\ \Leftrightarrow\ &V \subset \operatorname{Span}(S) \end{aligned}$$

Ma trận chuyển cơ sở

Ma trận chuyển cơ sở

Câu hỏi: chuyển biểu diễn theo một cơ sở sang biểu diễn theo một cơ sở khác?

Ma trận chuyển cơ sở

Cho không gian vector n chiều U, các cơ sở $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \ldots, \vec{u}_n\}$, $T = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$. **Ma trận chuyển cơ sở** từ S sang T:

$$M_{S\to T} = \begin{bmatrix} [\vec{u}_1]_T & [\vec{u}_2]_T & \cdots & [\vec{u}_n]_T \end{bmatrix}$$

Ma trận trên thoả mãn: $M_{S\to T}[\vec{u}]_S = [\vec{u}]_T \quad \forall \vec{u} \in U$.

Như vậy,

$$\Rightarrow \boxed{M_{T\to S} M_{S\to T} = I_n}$$

Ma trận chuyển cơ sở

Ví dụ 5, tiếp theo

Cho $E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ và $S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ là các cơ sở của $\mathbb{R}^2$. Khi đó:

$$M_{E \to S} = \begin{bmatrix} [e_1]_S & [e_2]_S \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Như vậy, biểu diễn của vector $\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix}^T$ qua S là

$$\frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2u_2 - u_1 \\ 2u_1 - u_2 \end{bmatrix}$$

Hình chiếu lên không gian con

Hình chiếu lên không gian con

Hình chiếu lên không gian con (Projection on a vector space)

Cho không gian con $V \subset \mathbb{R}^n$ và vector $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$. **Hình chiếu** $\vec{u}$ của $\vec{v}$ lên V thoả:

$$(\vec{v} - \vec{u}) \in V^\perp$$

Tính chất

- $\vec{u}$ xác định duy nhất: $\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} \text{proj}_{\vec{v}_i}(\vec{v})$, với $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k\}$ là một cơ sở trực chuẩn của V.
- $(\vec{v} - \vec{u}) \cdot \vec{u} = 0$.
- $\vec{u}$ là nghiệm của $\min_{\vec{x} \in V} \|\vec{x} - \vec{v}\|$.

Ví dụ: "$\mathbb{R}^2$ trong $\mathbb{R}^3$" $\rightarrow$ "hình chiếu"

Hình chiếu lên không gian con

Để chiếu vector $\vec{u}$ lên vector đơn vị $\vec{y}$:

$$\text{proj}_{\vec{y}}(\vec{u}) = (\vec{y}\vec{y}^T)\vec{u} = P_{\vec{y}}\vec{u}$$

Như vậy, với một cơ sở trực chuẩn của V thì hình chiếu $\vec{u}$ của $\vec{v}$ lên V là

$$\vec{u} = \sum_{i=1}^{k} P_{\vec{v}_i}\vec{v} = (\sum_{i=1}^{k} P_{\vec{v}_i})\vec{v} = P_V\vec{v}$$