

Các kiến thức cơ bản về giải tích hàm một biến

Nguyen Nguyen

Ngày 27 tháng 7 năm 2021

Mục lục

- 1 Giới thiệu
- 2 Giới hạn
 - Định nghĩa giới hạn
 - Tính liên tục
- 3 Đạo hàm
- 4 Cực trị hàm số

Preferences

- <https://pimavn.github.io/pdf/2018/lectures-and-projects/calculus.pdf>
- Nội dung bài giảng: Chương 1, 2.1, 2.2, 2.4, (optional) 3.1, 3.4.

1 Giới thiệu

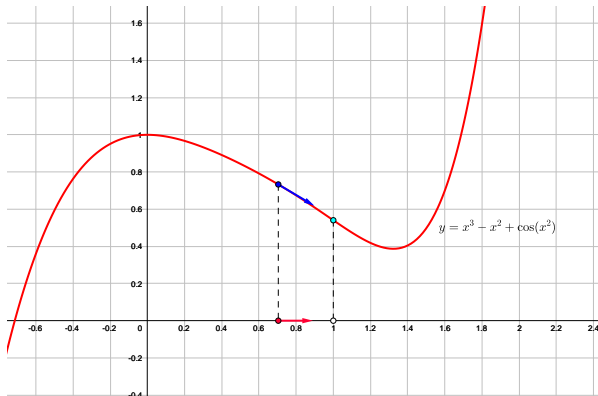
2 Giới hạn

- Định nghĩa giới hạn
- Tính liên tục

3 Đạo hàm

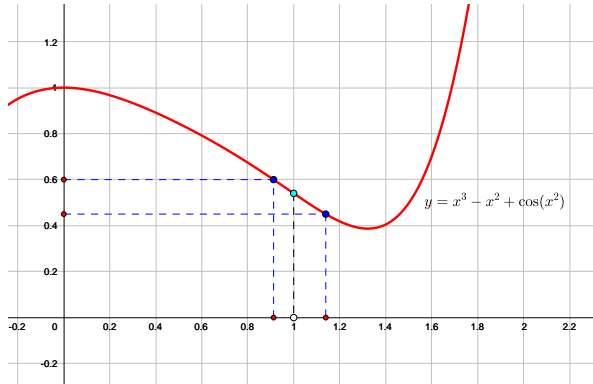
4 Cực trị hàm số

Motivation



Hình: Mô tả giới hạn

Làm thế nào để định nghĩa giới hạn



Hình: Mô tả giới hạn

Định nghĩa giới hạn

Definition (Giới hạn)

Cho hàm số $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ xác định trong một lân cận của a . Số thực L được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow a$ nếu:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : |f(x) - L| < \epsilon, \forall x \in A : 0 < |x - a| < \delta_\epsilon$$

Ta ký hiệu:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Ví dụ

Chứng minh bằng định nghĩa:

$$\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = 4.$$

Giới hạn một bên

Definition (Giới hạn một bên)

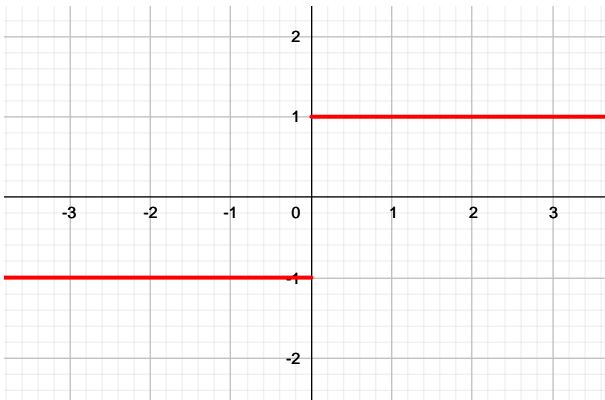
Cho một hàm số $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Nếu f xác định trên $(a - d, a)$ với $d > 0$ nào đó và tồn tại $L \in \mathbb{R}$ sao cho:

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta_\epsilon > 0 : a - \delta_\epsilon < x < a \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Thì ta gọi đây là **giới hạn bên trái** của $f(x)$, ký hiệu $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Tương tự, ta cũng có định nghĩa **giới hạn bên phải** của hàm số $f(x)$ tại a .

Ví dụ



Hình: Hai phía tại điểm $x = 0$ của hàm số $f(x) = \frac{x}{|x|}$ có giới hạn khác nhau

Giới hạn tại vô cùng

Definition (Giới hạn tại vô cùng)

Cho hàm số $y = f(x)$ xác định trên $(x_0, +\infty)$. Số thực L hữu hạn được gọi là giới hạn của hàm số $f(x)$ khi $x \rightarrow +\infty$ nếu:

$$\forall \epsilon > 0, \exists A_\epsilon > 0 : x > A_\epsilon \implies |f(x) - L| < \epsilon.$$

Ví dụ

- 1 Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x+3}{x+5}$.
- 2 Tính giới hạn $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{|x|}$.

Sự tồn tại của giới hạn

Theorem

Cho $f(x)$ là một hàm số xác định trên một lân cận của a . Giới hạn của $f(x)$ tại a tồn tại khi và chỉ khi giới hạn hai bên của $f(x)$ tại $x = a$ tồn tại và bằng nhau. Hơn nữa, nếu giới hạn của hàm số tồn tại thì nó là duy nhất.

Tính liên tục của hàm số

Definition (Liên tục tại một điểm)

Cho f là một hàm số xác định trên một lân cận của a . Ta nói hàm số $f(x)$ liên tục tại a nếu

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

Definition (Liên tục trên một tập)

Hàm số $f : A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ liên tục trên A nếu nó liên tục tại tất cả các điểm $x \in A$.

Ví dụ

- 1 Một đa thức $P(x) \in \mathbb{R}[x]$ bất kỳ liên tục trên \mathbb{R} .
- 2 $f(x) = \frac{1}{x}$ không liên tục tại $x = 0$.

1 Giới thiệu

2 Giới hạn

- Định nghĩa giới hạn
- Tính liên tục

3 Đạo hàm

4 Cực trị hàm số

Định nghĩa

Definition (Đạo hàm)

Cho hàm số f xác định trên một khoảng (c, d) và $c < a < d$. Giá trị

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nếu tồn tại, thì được gọi là **đạo hàm** của $f(x)$ tại $x = a$.

Định nghĩa

Definition (Đạo hàm)

Cho hàm số f xác định trên một khoảng (c, d) và $c < a < d$. Giá trị

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

nếu tồn tại, thì được gọi là **đạo hàm** của $f(x)$ tại $x = a$.

Nếu f có đạo hàm tại a , ta nói f **khả vi** tại a . Tương tự, ta nói f **khả vi trên khoảng** (c, d) nếu nó khả vi tại mọi điểm a trên đó.

Ta ký hiệu đạo hàm của một hàm f theo biến x là $f'(x)$ hoặc $\frac{df}{dx}$.

Vi phân

Độ dời của x : $\Delta x = x - a$.

Độ dời của f : $\Delta f = f(x) - f(a)$.

Công thức đạo hàm có thể được viết lại thành:

$$f' = \frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}.$$

Mở rộng: Xét hai hàm số f, g , ta có thể định nghĩa:

$$\frac{df}{dg} = \lim_{\Delta g \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta g}.$$

Ví dụ

Xét tính khả vi của hàm số $f(x) = x^2 + 2x + 3$ tại điểm $x = -1$.

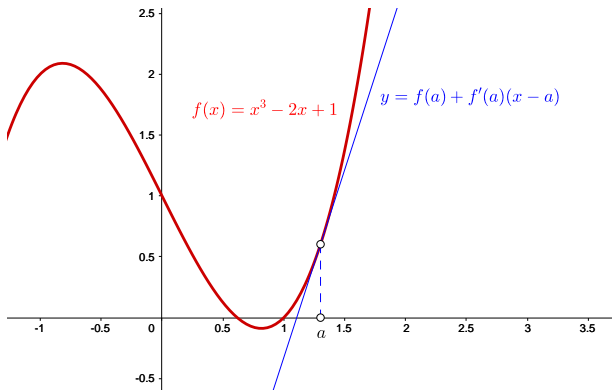
Các công thức tính đạo hàm

Theorem

Cho $u(x), v(x)$ là hai hàm số xác định và khả vi trên $A \subset \mathbb{R}$:

- 1 Với $c \in \mathbb{R}$, $\frac{dc}{dx} = 0$.
- 2 Với $a \in \mathbb{R}$, $\frac{dx^a}{dx} = ax^{a-1}$.
- 3 Với $c \in \mathbb{R}$, u là một hàm số: $(cu)' = cu'$.
- 4 Tổng hai hàm số: $(u \pm v)' = u' \pm v'$.
- 5 Tích hai hàm số: $(uv)' = u'v + v'u$.
- 6 Thương hai hàm số: $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$ ($v(x) \neq 0, \forall x \in A$).

Ý nghĩa thực tiễn của đạo hàm



Hình: Đạo hàm là hệ số góc của đường tiếp tuyến

Ý nghĩa thực tiễn của đạo hàm

Theorem (Độ biến thiên của hàm số)

Giả sử $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ khả vi trên (a, b)

- 1 $f'(x) \geq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ không giảm trên $[a, b]$, hơn nữa nếu $f'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm $x \in (a, b)$ thì f tăng ngặt.
- 2 $f'(x) \leq 0, \forall x \in (a, b) \Rightarrow f$ không tăng trên $[a, b]$, hơn nữa nếu $f'(x) = 0$ có hữu hạn nghiệm $x \in (a, b)$ thì f giảm ngặt.

Ví dụ

Tính phương trình đường tiếp tuyến của đồ thị $f(x) = x^3 - 2x + 1$ tại điểm $x = 2$.

Đạo hàm của hàm hợp - Chain rule

Theorem

Cho $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ và $g(A) \subset B$. Nếu f, g khả vi thì $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}$ cũng khả vi và ta có:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Đạo hàm của hàm hợp - Chain rule

Theorem

Cho $f : B \rightarrow \mathbb{R}$, $g : A \rightarrow \mathbb{R}$ và $g(A) \subset B$. Nếu f, g khả vi thì $f \circ g : A \rightarrow \mathbb{R}$ cũng khả vi và ta có:

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x).$$

Đặt $z = f(g(x))$, $y = g(x)$ thì ta có $z = f(y)$. Ta có

$$\frac{dz}{dx} = (f \circ g)'(x), \frac{dz}{dy} = f'(y) = f'(g(x)), \frac{dy}{dx} = g'(x)$$

nên

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

Ví dụ

Tính đạo hàm của hàm số $h(x) = (x^3 + 3x)^4 - (x^3 + 3x)^3 + 5$ theo x .

1 Giới thiệu

2 Giới hạn

- Định nghĩa giới hạn
- Tính liên tục

3 Đạo hàm

4 Cực trị hàm số

Định nghĩa

Cho hàm f xác định trên miền D .

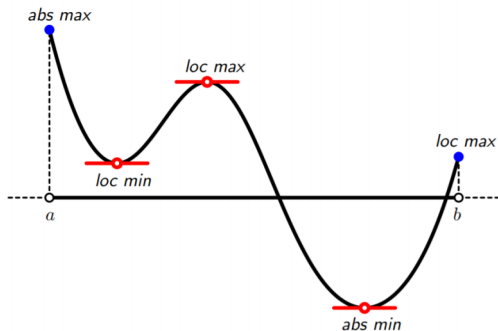
Definition (Cực đại, cực tiểu toàn miền)

Điểm $a \in D$ được gọi là **cực đại (cực tiểu) toàn miền** của f nếu $\forall x \in D, f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$).

Definition (Cực đại, cực tiểu địa phương)

Điểm $a \in D$ được gọi là **cực đại (cực tiểu) địa phương** của f nếu tồn tại $\delta > 0$: $(a - \delta, a + \delta) \in D$ và $\forall x \in (a - \delta, a + \delta), f(x) \leq f(a)$ ($f(x) \geq f(a)$).

Định nghĩa



Hình: Mô tả cực trị

Các xác định cực trị

Theorem

Cho f khả vi trên một lân cận của a . Nếu a là một điểm cực trị địa phương của f thì $f'(a) = 0$.

Definition (Điểm dừng)

Điểm dừng của một hàm số f là nghiệm của phương trình $f'(x) = 0$.

Cách xác định cực trị địa phương

Theorem

Giả sử f xác định trên một lân cận D của a .

- 1 Nếu trong một khoảng nhỏ $(a - \delta, a + \delta) \subset D$, ta có $f'(x) < 0$ với $x < c$ và $f'(x) > 0$ với $x > c$ thì a là cực tiểu địa phương của f .
- 2 Nếu trong một khoảng nhỏ $(a - \delta, a + \delta) \subset D$, ta có $f'(x) > 0$ với $x < c$ và $f'(x) < 0$ với $x > c$ thì a là cực đại địa phương của f .

Nếu chỉ có $f'(a) = 0$: không thể kết luận.

Xác định cực trị địa phương bằng đạo hàm bậc hai

Theorem

Cho f khả vi hai lần trên một lân cận của a và $f'(a) = 0$, khi đó nếu

- ❶ $f''(a) < 0$: a là một điểm cực đại của f .
- ❷ $f''(a) > 0$: a là một điểm cực tiểu của f .
- ❸ $f''(a) = 0$: không thể kết luận gì về a .

Bài tập

Xác định các điểm cực trị của hàm số

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 5x - 7.$$

Phụ lục 1: Các định lý về tính liên tục

Theorem (Định lý giới hạn trung gian)

Nếu f là một hàm số liên tục trên khoảng $[a, b]$ và $f(a) \leq y \leq f(b)$ thì tồn tại $c \in [a, b]$ sao cho $f(c) = y$.

Theorem (Đạo hàm \Rightarrow Liên tục)

Nếu một hàm số f xác định trên một lân cận của a và khả vi tại điểm a thì f liên tục tại a .

Theorem (Liên tục trên một khoảng đóng)

Một hàm số liên tục trên một khoảng đóng thì có cực đại và cực tiểu toàn miền trên khoảng đóng đó.

Phụ lục 2: Xác định cực trị toàn miền của hàm số trên khoảng $[a, b]$

Cho f là hàm số liên tục trên $[a, b]$ và khả vi trên (a, b) .

- Bước 1: Xác định tất cả các điểm dừng của f trên (a, b) , đặt là tập A .
- Xét giá trị của f tại các điểm thuộc $A \cup \{a, b\}$. Giá trị lớn nhất và nhỏ nhất trong các giá trị này là cực đại và cực tiểu toàn miền của f trên $[a, b]$.