

Problem 1. Chứng minh rằng

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0.$$

Chứng minh. Với mỗi $\epsilon > 0$, chọn $\delta = \epsilon$. Khi đó, ta có với mỗi điểm (x, y) mà $\|(x, y) - (0, 0)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta = \epsilon$, ta có

$$\left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \sqrt{x^2 + y^2} < \epsilon.$$

Theo định nghĩa của giới hạn, ta có $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$. ■

Problem 2. Chứng minh rằng giới hạn sau không tồn tại

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$$

Chứng minh. Giả sử phản chứng rằng tồn tại $L \in \mathbb{R}$ thỏa mãn

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2} = L.$$

Chọn $\epsilon < \frac{1}{10}$, theo định nghĩa của giới hạn, tồn tại hằng số $\delta > 0$ sao cho với mọi điểm (x, y) mà $\|(x, y) - (0, 0)\|_2 = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$, ta có

$$\left| \frac{x^2}{x^2 + y^2} - L \right| < \epsilon = \frac{1}{10}.$$

Chọn hai điểm $(x_1, y_1) = (\delta_1, \delta_1)$ với $\delta_1 < \frac{\delta}{\sqrt{2}}$ và $(x_2, y_2) = (\delta_2, 2\delta_2)$ với $\delta_2 < \frac{\delta}{\sqrt{5}}$, ta có $\|(x_1, y_1) - (0, 0)\| = \delta_1\sqrt{2} < \delta$, và $\|(x_2, y_2) - (0, 0)\| = \delta_2\sqrt{5} < \delta$, do đó

$$\left| \frac{x_1^2}{x_1^2 + y_1^2} - L \right|, \left| \frac{x_2^2}{x_2^2 + y_2^2} - L \right| < \epsilon = \frac{1}{10}.$$

Do đó

$$\frac{2}{10} > \left| \frac{x_1^2}{x_1^2 + y_1^2} - L \right| + \left| \frac{x_2^2}{x_2^2 + y_2^2} - L \right| = \left| \frac{1}{2} - L \right| + \left| \frac{1}{5} - L \right| \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{5} = \frac{3}{10}.$$

Ta có điều vô lý. ■

Remark 0.1. Một hàm số nếu có giới hạn tại một điểm thì nó phải là duy nhất, và hơn nữa giới hạn của hàm số khi ta tiến tới điểm đó từ các hướng với các phương khác nhau thì đều phải bằng nhau (ví dụ, tiến điểm (x, y) theo phương $(1, 1)$ hoặc $(1, 2)$ thì phải nhận hai giá trị bằng nhau). Do đó, khi kiểm tra xem một giới hạn là không tồn tại, ta có thể xét giới hạn khi cho (x, y) tiến tới một điểm theo hai phương khác nhau. Nếu ta nhận được kết quả khác nhau thì giới hạn đó không tồn tại.

Có thể hình dung việc giới hạn tiến đến mọi hướng bằng nhau giống như tổng quát hóa của trường hợp hàm một biến, khi hai hướng duy nhất ta có là từ hai bên của đạo hàm. Với trường hợp một biến, giới hạn tồn tại khi và chỉ khi giới hạn hai phía tồn tại và bằng nhau, và tương tự thế, giới hạn trong trường hợp nhiều biến tồn tại khi và chỉ khi giới hạn từ mọi hướng là tồn tại và bằng nhau.