

# Đạo hàm và cực trị của hàm đa biến

Nguyen Nguyen

Ngày 30 tháng 7 năm 2021

# Mục lục

## 1 Giới thiệu

## 2 Đạo hàm của hàm số nhiều biến

- Đạo hàm riêng
- Đạo hàm và tính khả vi của hàm đa biến, Gradient
- Đạo hàm theo hướng

## 3 Cực trị

- Đạo hàm cấp cao
- Cực trị của hàm số thực
- Quy tắc xác định cực trị

# Preferences

- Chương 5,6: <https://pimavn.github.io/pdf/2018/lectures-and-projects/calculus.pdf>
- Chương 2 & 3: *Vector Calculus*, Marsden & Tromba.

## 1 Giới thiệu

## 2 Đạo hàm của hàm số nhiều biến

- Đạo hàm riêng
- Đạo hàm và tính khả vi của hàm đa biến, Gradient
- Đạo hàm theo hướng

## 3 Cực trị

- Đạo hàm cấp cao
- Cực trị của hàm số thực
- Quy tắc xác định cực trị

# Đạo hàm riêng của hàm số thực

## Definition

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số thực với  $U$  mở và  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Giá trị

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

nếu tồn tại, thì được gọi là **đạo hàm riêng theo  $x_i$  của  $f$  tại  $\mathbf{x}$** . Ta ký hiệu giá trị này là  $f_{x_i}(\mathbf{x})$  hoặc  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$

# Đạo hàm riêng của hàm số thực

## Definition

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  là một hàm số thực với  $U$  mở và  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . Giá trị

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)}{h},$$

nếu tồn tại, thì được gọi là **đạo hàm riêng theo  $x_i$  của  $f$  tại  $\mathbf{x}$** . Ta ký hiệu giá trị này là  $f_{x_i}(\mathbf{x})$  hoặc  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})$

Lưu ý: Đặt  $\mathbf{e}_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$ , ta có

$$f(x_1, \dots, x_i + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) = f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_i) - f(\mathbf{x})$$

## Ví dụ

Cho hàm số  $f(x, y) = x^3y + y^3$ . Tính  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$ .

## Ví dụ

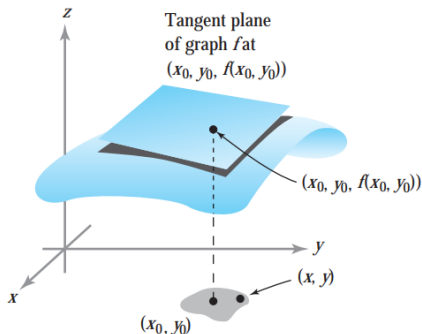
Cho hàm số  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  xác định bởi

$$f(x, y) = \begin{cases} xy \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & , (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) . \end{cases}$$

Chứng minh rằng  $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, 0) = x_0$ .

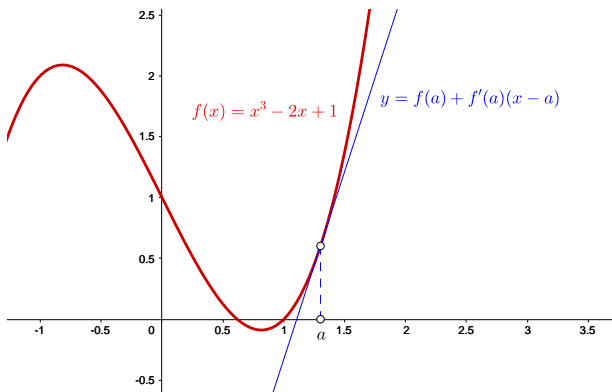


# Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng (xấp xỉ tuyến tính)



**Hình:** Hai đạo hàm riêng biểu diễn mặt phẳng tiếp xúc với đồ thị tại điểm  $(x_0, y_0)$

# Xấp xỉ tuyến tính ở hàm một biến



**Hình:** Tiếp tuyến là đường thẳng "xấp xỉ" hàm số tại một điểm

# Motivation cho khái niệm đạo hàm

**Recall:** Xấp xỉ tuyến tính cho hàm một biến tại điểm  $x_0$  là  $f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

**Xấp xỉ tuyến tính cho hàm thực hai biến:**

$$f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot (y - y_0) = f(\mathbf{x}_0) + \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

$$\text{Với } \mathbf{x} = (x, y), \mathbf{x}_0 = (x_0, y_0), \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right].$$

## 1 Giới thiệu

## 2 Đạo hàm của hàm số nhiều biến

- Đạo hàm riêng
- Đạo hàm và tính khả vi của hàm đa biến, Gradient
- Đạo hàm theo hướng

## 3 Cực trị

- Đạo hàm cấp cao
- Cực trị của hàm số thực
- Quy tắc xác định cực trị

## Ma trận đạo hàm riêng / Jacobi matrix

### Definition

Cho  $U$  là tập mở,  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  và giả sử mọi đạo hàm riêng của  $f$  tại  $\mathbf{x}_0$  tồn tại. Ma trận

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(\mathbf{x}_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(\mathbf{x}_0) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \times n}$$

được gọi là **ma trận đạo hàm riêng** hay **ma trận Jacobi** của hàm  $f$  tại điểm  $\mathbf{x}_0$ . Ta ký hiệu là  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$  hoặc  $\mathbf{J}_f(\mathbf{x}_0)$ .

# Tính khả vi tại một điểm

## Definition

Cho  $U$  là tập mở và  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ . Ta nói  $f$  **khả vi** tại điểm  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  nếu mọi đạo hàm riêng của  $f$  tại  $\mathbf{x}_0$  tồn tại và

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} = 0$$

với  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$  là ma trận đạo hàm riêng tính tại giá trị  $\mathbf{x}_0$ . Ta gọi  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)$  là **đạo hàm** của  $f$  tại điểm  $\mathbf{x}_0$ .

## Ví dụ

Chứng minh rằng hàm số  $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$  khả vi tại điểm  $(0, 0)$ .

## Ví dụ

Chứng minh rằng hàm số  $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$  khả vi tại điểm  $(0, 0)$ .

- Step 1: Tính ma trận đạo hàm riêng của  $f$  tại  $(0, 0)$ .



## Ví dụ

Chứng minh rằng hàm số  $f(x, y) = (x^2 + y^2, 2xy)$  khả vi tại điểm  $(0, 0)$ .

- Step 1: Tính ma trận đạo hàm riêng của  $f$  tại  $(0, 0)$ .
- Step 2: Viết biểu thức ước lượng sai số và tính lim khi  $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ .

# Khả vi của hàm thực

## Theorem

Một hàm số  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  khả vi khi và chỉ khi các hàm thành phần  $f_i$  của nó khả vi.

# Gradient

## Definition (Gradient)

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  có đạo hàm riêng theo tất cả các biến tại  $\mathbf{x} \in U$ . Vector

$$\nabla f(\mathbf{x}) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{x}) \quad \cdots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right]^\top$$

được gọi là **gradient** của  $f$  tại  $\mathbf{x}$ , ký hiệu là  $\nabla f(\mathbf{x})$ .

Ta thấy với  $m = 1$ ,  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \nabla f(\mathbf{x}_0)^\top$ .

## Ví dụ

Cho  $f(x, y) = x^3y + y^3$ . Tính  $\nabla f$ .

# Các định lý về đạo hàm

## Theorem

Nếu  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$  thì  $f$  liên tục tại  $\mathbf{x}_0$ .

**Lưu ý:** Partial derivatives tồn tại tại  $\mathbf{x}_0$   $\nRightarrow$  hàm số liên tục tại  $\mathbf{x}_0$ .

Do đó, partial derivatives tồn tại tại  $\mathbf{x}_0$   $\nRightarrow f$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$ .

Cần thêm điều kiện gì để  $f$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$ ?

# Điều kiện cần của tính khả vi

## Theorem

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  và  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Giả sử rằng tất cả các đạo hàm riêng  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  đều tồn tại và liên tục tại điểm  $\mathbf{x}_0$ . Khi đó,  $f$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$ .

# Điều kiện cần của tính khả vi

## Theorem

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  và  $\mathbf{x}_0 \in U$ . Giả sử rằng tất cả các đạo hàm riêng  $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$  đều tồn tại và liên tục tại điểm  $\mathbf{x}_0$ . Khi đó,  $f$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$ .

Như vậy ta có được:

Đạo hàm riêng liên tục  $\implies$  khả vi  $\implies$  Đạo hàm riêng tồn tại.

Lưu ý rằng tất cả các chiều ngược lại đều không đúng.

# Khả vi liên tục

## Definition

Một hàm số  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$  được gọi là **khả vi liên tục** nếu mọi đạo hàm riêng của nó tồn tại và liên tục trên miền xác định của nó.

Tập hợp các hàm số khả vi liên tục được ký hiệu là  $C^1$ .



# Chain rule

## Theorem

Cho  $g : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ,  $f : V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$  thỏa mãn  $g(U) \subset V$ .  
Giả sử  $g$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$  và  $f$  khả vi tại  $g(\mathbf{x}_0)$ , khi đó  $f \circ g$  khả vi tại  $\mathbf{x}_0$  và

$$\mathbf{D}(f \circ g)(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(g(\mathbf{x}_0))\mathbf{D}g(\mathbf{x}_0).$$

## Ví dụ

Cho hàm số  $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  và  $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  như sau:

$$g(s, t) = (s^2 + t^2, 2st, s^2 - t^2),$$

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2 - z^2.$$

Tính  $\mathbf{D}(f \circ g)$ .

## 1 Giới thiệu

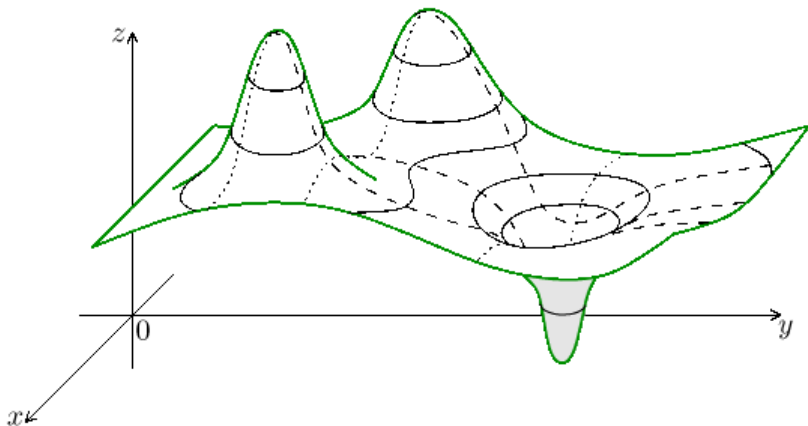
## 2 Đạo hàm của hàm số nhiều biến

- Đạo hàm riêng
- Đạo hàm và tính khả vi của hàm đa biến, Gradient
- Đạo hàm theo hướng

## 3 Cực trị

- Đạo hàm cấp cao
- Cực trị của hàm số thực
- Quy tắc xác định cực trị

# Ý nghĩa hình học của đạo hàm riêng (tốc độ theo hướng)



# Định nghĩa

## Definition

Xét hàm  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  và vectơ  $a \in \mathbb{R}^n$  khác vector không. Giới hạn

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + t\mathbf{a}) - f(\mathbf{x})}{t}$$

nếu có, được gọi là đạo hàm theo hướng  $a$  của  $f$  tại  $\mathbf{x}$ , ký hiệu  $D_a f(\mathbf{x})$ .

# Nhận xét

**Nhận xét 1.**  $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}) = D_{\mathbf{e}_i}f(\mathbf{x})$ , với  $\mathbf{e}_i$  là vector chính tắc thứ  $i$ .

**Nhận xét 2.** Đặt  $f_a(t) = f(\mathbf{x} + t\mathbf{a})$ , ta có  $D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}) = f'_a(0)$ .

**Nhận xét 3:** Nếu  $\mathbf{a} = k\mathbf{b}$  thì  $D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}) = kD_{\mathbf{b}}f(\mathbf{x})$ .

## Definition

Nếu  $\|\mathbf{a}\| = 1$  thì  $D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x})$  là tốc độ thay đổi khi di chuyển theo hướng  $\mathbf{a}$ .

## Ví dụ

Cho hàm số  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Tính đạo hàm của hàm số theo hướng  $\mathbf{a} = (m, n)$ .

## Ví dụ

Cho hàm số  $f(x, y) = x^2 + y^2$ . Tính đạo hàm của hàm số theo hướng  $\mathbf{a} = (m, n)$ .

**Nhận xét 4:**  $D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}.$



# Mối liên hệ giữa gradient và đạo hàm có hướng

## Theorem

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi tại  $\mathbf{x}$ . Khi đó, mọi đạo hàm có hướng của  $f$  tại  $\mathbf{x}$  tồn tại và

$$D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}) = \mathbf{D}f(\mathbf{x})\mathbf{a} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{a}$$

với  $\mathbf{a}$  là một vector biểu diễn hướng tùy ý nào đó.

## Ví dụ

Cho hàm số  $f(x, y) = x^3y + y^3$ . Tính đạo hàm của hàm số theo hướng  $\mathbf{a} = (1, -2)$ .

# Hướng có tốc độ nhanh nhất

**Nhận xét:**

$$-|\mathbf{a}||\nabla f(\mathbf{x})| \leq D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{a}||\nabla f(\mathbf{x})|.$$

# Hướng có tốc độ nhanh nhất

**Nhận xét:**

$$-|\mathbf{a}||\nabla f(\mathbf{x})| \leq D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{a}||\nabla f(\mathbf{x})|.$$

Do đó,  $\nabla f(\mathbf{x})$  chỉ hướng mà  $f$  tăng với tốc độ lớn nhất, còn  $-\nabla f(\mathbf{x})$  chỉ hướng mà  $f$  có tốc độ giảm lớn nhất.

# Hướng có tốc độ nhanh nhất

**Nhận xét:**

$$-|\mathbf{a}||\nabla f(\mathbf{x})| \leq D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}) = \mathbf{a} \cdot \nabla f(\mathbf{x}) \leq |\mathbf{a}||\nabla f(\mathbf{x})|.$$

Do đó,  $\nabla f(\mathbf{x})$  chỉ hướng mà  $f$  tăng với tốc độ lớn nhất, còn  $-\nabla f(\mathbf{x})$  chỉ hướng mà  $f$  có tốc độ giảm lớn nhất.

**Sneak peak:** Gradient Descent

## Ví dụ

Cho hàm số  $f(x, y, z) = 3x^2z + 2y^2z^2 + 3xz^2$ . Giả sử ta đang đứng tại điểm  $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ , tìm hướng mà  $f$  có tốc độ tăng lớn nhất.

# Đạo hàm có hướng và tính khả vi liên tục

## Theorem

Một hàm số  $f$  khả vi liên tục tại  $\mathbf{x}_0$  khi và chỉ khi nó khả vi theo mọi hướng và  $D_{\mathbf{a}}f$  liên tục tại  $\mathbf{x}_0$ .

Đây chính là định nghĩa khả vi của giáo trình PiMA.

## 1 Giới thiệu

## 2 Đạo hàm của hàm số nhiều biến

- Đạo hàm riêng
- Đạo hàm và tính khả vi của hàm đa biến, Gradient
- Đạo hàm theo hướng

## 3 Cực trị

- Đạo hàm cấp cao
- Cực trị của hàm số thực
- Quy tắc xác định cực trị



# Đạo hàm bậc hai

## Definition

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  là hàm khả vi liên tục. Đạo hàm riêng theo biến  $x_j$  của hàm  $f_{x_i} : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  tại  $\mathbf{x}$ , nếu có, được gọi là **đạo hàm riêng bậc 2** của  $f$  tại  $\mathbf{x}$ . Ta ký hiệu là  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(\mathbf{x})$ , hoặc  $f_{x_i x_j}(\mathbf{x})$  với  $i, j \in \overline{1, n}$ .

Nếu một hàm số có tất cả các đạo hàm bậc hai theo mọi tổ hợp các biến và tất cả các đạo hàm bậc hai đó liên tục trên miền xác định  $U$ , ta gọi hàm số đó **khả vi hai lần liên tục**, hoặc hàm số đó **thuộc lớp  $C^2$** .

## Ví dụ

Cho hàm số  $f(x, y) = x^3y + y^3$ .

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} =$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} =$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} =$

- $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} =$

# Thứ tự của đạo hàm bậc hai

## Theorem

Cho  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi hai lần liên tục. Khi đó

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$$

$\forall i, j \in \overline{1, n}$ .

# Ma trận Hessian

Cho một hàm số thực  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi hai lần.

$$\mathbf{D}f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$$

Đạo hàm bậc hai của hàm số này tại  $\mathbf{x}$  sẽ là:

$$\mathbf{D}(\mathbf{D}(f))(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n}(\mathbf{x}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(\mathbf{x}) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(\mathbf{x}) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Ta gọi đây là **ma trận Hessian** của hàm số  $f$  tính tại  $\mathbf{x}$ , ký hiệu  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x})$

## 1 Giới thiệu

## 2 Đạo hàm của hàm số nhiều biến

- Đạo hàm riêng
- Đạo hàm và tính khả vi của hàm đa biến, Gradient
- Đạo hàm theo hướng

## 3 Cực trị

- Đạo hàm cấp cao
- Cực trị của hàm số thực
- Quy tắc xác định cực trị

# Motivation

Cho một hàm số  $f$  nhiều biến nhận giá trị thực. Ta muốn khảo sát các điểm trên miền xác định có giá trị lớn nhất hoặc nhỏ nhất xung quanh so với lân cận của nó.

**Important assumption:** Trong phần này, miền xác định  $U$  của các hàm số sẽ là miền mở.

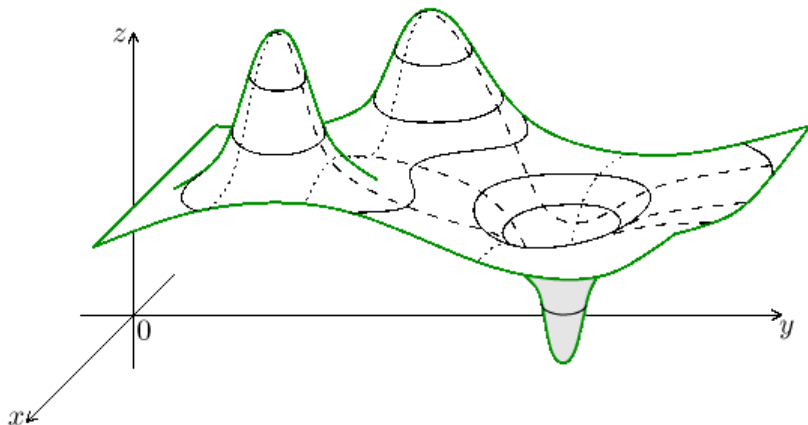
# Định nghĩa

## Definition

Cho  $f : D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  và  $\mathbf{x}_0 \in D$ .

- i) Điểm  $\mathbf{x}_0$  được gọi là **cực đại (cực tiểu) địa phương** của  $f$  nếu  $\exists \delta > 0, B_\delta(\mathbf{x}_0) \subset D$  sao cho  $\forall \mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0), f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$  ( $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ ).
- ii) Điểm  $\mathbf{x}_0$  được gọi là **cực đại (cực tiểu) toàn miền** của  $f$  nếu  $\forall \mathbf{x} \in D, f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{x}_0)$  ( $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{x}_0)$ ).

# Mô tả cực trị địa phương





# Nhận xét

Hàm số  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi và có cực trị địa phương tại  $\mathbf{x}_0$  thì  $D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}_0) = 0, \forall \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ . Do

$$D_{\mathbf{a}}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{D}f(\mathbf{x}_0)\mathbf{a}.$$

Nên  $\mathbf{D}f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ , hay  $\nabla f(\mathbf{x}_0) = \mathbf{0}$ .

# Điều kiện cần của cực trị địa phương

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  khả vi

## Theorem

*Giả sử  $x_0$  là một điểm cực trị địa phương, khi đó  $\nabla f(x_0) = 0$ .*

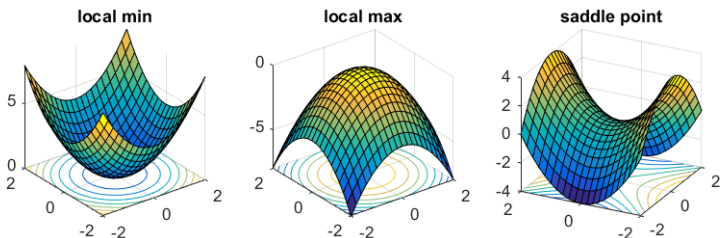
## Definition (Điểm dừng)

Điểm dừng của hàm  $f$  là điểm thỏa mãn  $\nabla f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ .

## Definition (Điểm yên ngựa)

Nếu  $x_0$  là một điểm dừng của  $f$  nhưng không phải là một cực trị địa phương, ta gọi nó là một **điểm yên ngựa**.

## Mô tả các loại điểm dừng



Hình: Cực tiểu, cực đại và điểm yên ngựa

## Ví dụ

Xác định các điểm dừng của hàm số  $f(x, y) = x^2 - y^2$ . Hỏi trong các điểm đó, điểm nào là cực trị, điểm nào là điểm yên ngựa?

# Tổng quát từ một biến

# Tổng quát từ một biến

Q: Thế nào là một ma trận "lớn hơn 0"?

# Tổng quát từ một biến

Q: Thế nào là một ma trận "lớn hơn 0"?

A: Ma trận xác định dương.

# Quy tắc xác định cực trị địa phương bằng đạo hàm bậc hai

## Definition

Cho  $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  thuộc lớp  $C^2$  và  $\mathbf{x}_0$  là một điểm dừng của  $f$ , khi đó

- 1  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$  xác định dương:  $\mathbf{u}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{u} > 0, \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , thì  $\mathbf{x}_0$  là cực tiểu địa phương của  $f$ .
- 2  $\mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0)$  xác định âm:  $\mathbf{u}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{u} < 0, \forall \mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ , thì  $\mathbf{x}_0$  là cực đại địa phương của  $f$ .
- 3 Có  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  thỏa  $\mathbf{u}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{u} < 0 < \mathbf{v}^\top \mathbf{H}_f(\mathbf{x}_0) \mathbf{v}$ :  $\mathbf{x}_0$  là một điểm yên ngựa.
- 4 Tất cả những trường hợp khác: không thể kết luận.



## Ví dụ

Tìm cực trị của  $f(x, y) = x^2 - 12y^2 + 4y^3 + 3y^4$ .

## Ví dụ

Tìm cực trị của  $f(x, y) = x^2 - 12y^2 + 4y^3 + 3y^4$ .

- Bước 1: Tìm các điểm dừng của  $f$ .

## Ví dụ

Tìm cực trị của  $f(x, y) = x^2 - 12y^2 + 4y^3 + 3y^4$ .

- Bước 1: Tìm các điểm dừng của  $f$ .
- Bước 2: Xác định ma trận Hessian  $\mathbf{H}_f$ .

## Ví dụ

Tìm cực trị của  $f(x, y) = x^2 - 12y^2 + 4y^3 + 3y^4$ .

- Bước 1: Tìm các điểm dừng của  $f$ .
- Bước 2: Xác định ma trận Hessian  $\mathbf{H}_f$ .
- Bước 3: Xét tính xác định dương, âm của ma trận Hessian tính tại mỗi điểm dừng.

# Bài tập

Khảo sát cực trị của hàm số  $f(x, y) = x^2 - 2xy + \frac{y^3}{3} - 3y$ .

## Tiếp theo

- Cực trị xét trên một miền tổng quát hơn miền mở.
- Cực trị có điều kiện, phương pháp nhân tử Lagrange.
- Thuật toán tìm cực trị (Gradient Descent).

# Phụ lục 1: Xác định cực trị toàn miền trên một miền bất kỳ

## Definition (Interior point / điểm trong)

Cho một tập  $D$ . Điểm  $\mathbf{x} \in D$  được gọi là điểm trong nếu tồn tại  $r > 0$  sao cho  $B_r(\mathbf{x}) \subset D$ .

## Definition (Miền trong)

Miền trong của  $D$  là tập hợp tất cả các điểm trong của  $D$ , ký hiệu là  $D^\circ$ .

## Definition (Biên)

Biên của  $D$  là tập  $\partial D = D \setminus D^\circ$ .

# Phụ lục 1: Xác định cực trị toàn miền trên một miền bất kỳ

## Theorem

Cho  $D$  là một tập hợp, khi đó  $D^\circ$  là một tập mở.

*Chứng minh:* Xét  $x \in D^\circ$ , khi đó tồn tại  $r > 0$  để  $B_r(x) \subset D$ . Ta có với mọi  $y \in B_r(x)$ , tồn tại  $r' > 0$  để  $B_{r'}(y) \subset B_r(x) \subset D$ . Do đó,  $y \in D^\circ$ , nên  $B_r(x) \subset D^\circ$ . Từ đây theo định nghĩa ta suy ra  $D^\circ$  là miền mở.



## Phụ lục 1: Xác định cực trị toàn miền trên một miền bất kỳ

Cực trị địa phương chỉ có thể tồn tại tại những điểm có một lân cận đủ nhỏ bao quanh nằm trong toàn bộ miền xác định của hàm, do đó nó nằm ở những điểm trong. Việc tách ra miền trong và biên của miền xác định giúp ta xác định được cực trị địa phương của miền trong, và để tính toán cực trị toàn miền, ta chỉ cần so sánh tại các điểm cực trị địa phương đó và các điểm trên biên.

# Phụ lục 1: Xác định cực trị toàn miền trên một miền bất kỳ

Các bước để xác định cực trị toàn miền cho một miền bất kỳ:

- 1 Xác định các điểm dừng của  $f$  trên  $D^\circ$ .
- 2 Xác định riêng các điểm dừng của  $f$  trên  $\partial D$ .
- 3 Tính giá trị của  $f$  tại điểm dừng của cả hai tập biên và miền trong.
- 4 Xuất ra giá trị lớn nhất / bé nhất.