

Hàm số nhiều biến

Nguyen Nguyen

Ngày 27 tháng 7 năm 2021

Mục lục

- 1 Giới thiệu
- 2 Hàm đa biến và đồ thị
- 3 Giới hạn và tính liên tục

Preferences

- Chương 4: <https://pimavn.github.io/pdf/2018/lectures-and-projects/calculus.pdf>
- Chương 2 & 3: *Vector Calculus*, Marsden & Tromba.

1 Giới thiệu

2 Hàm đa biến và đồ thị

3 Giới hạn và tính liên tục

Định nghĩa

Definition (Hàm số nhiều biến)

Hàm số đa biến f là hàm số gán mỗi điểm $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ vào $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$. Mỗi thành phần của $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ là một hàm trả về giá trị thực

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, \dots, x_n)$$

$$\vdots$$

$$y_m = f_m(x_1, \dots, x_n)$$

Ta gọi $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ là các *hàm thành phần* của f .

Ví dụ

Hàm số $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 + y^2 + z^2 \\ xyz \end{pmatrix}.$$

là một hàm số đa biến

Đồ thị hàm số đa biến

Definition

Cho $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Tập hợp các điểm $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{m+n}$ với $\mathbf{x} \in U$ được gọi là **đồ thị của hàm số f** .

Đồ thị hàm số đa biến

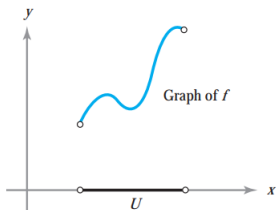
Definition

Cho $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. Tập hợp các điểm $(\mathbf{x}, f(\mathbf{x})) \in \mathbb{R}^{m+n}$ với $\mathbf{x} \in U$ được gọi là **đồ thị của hàm số f** .

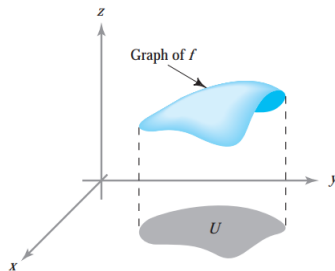
Ví dụ:

- 1 Với hàm số một biến $f(x) = x^2 - 3x + 1$, đồ thị của hàm số f là đường $\{(x, x^2 - 3x + 1) : x \in \mathbb{R}\}$ trong \mathbb{R}^2 .
- 2 Với hàm số đa biến $f(x, y) = xy - x + y$, đồ thị của hàm số f là mặt $\{(x, y, xy - x - y) : (x, y) \in \mathbb{R}^2\}$ trong \mathbb{R}^3 .

Mô tả đồ thị



(a)



(b)

Hình: Mô tả đồ thị của hàm số thực đơn biến và đa biến

Tập mức - Đường đồng mức

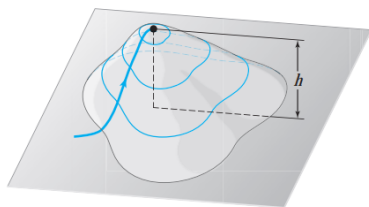
Definition

Cho một hàm số thực đa biến $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ và hằng số $c \in \mathbb{R}$.
Tập mức của giá trị c (*level set of value c*) là tập các điểm $\mathbf{x} \in U$ mà $f(\mathbf{x}) = c$

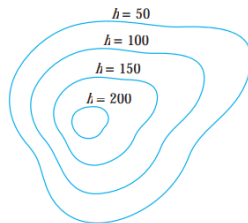
$$\{\mathbf{x} \in U : f(\mathbf{x}) = c\} \subset \mathbb{R}.$$

Với $n = 2$, ta còn gọi tập mức là **đường đồng mức** (level contour).

Mô tả đường đồng mức (Level contours)



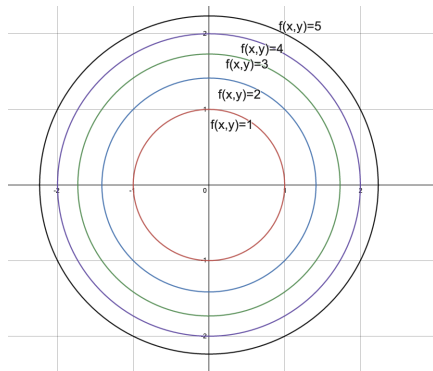
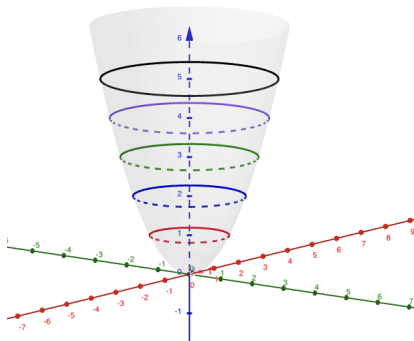
(a)



(b)

Hình: Đường đồng mức của một hàm số hai biến chiều trên một mặt phẳng hai chiều

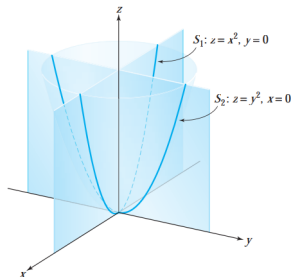
Đường đồng mức - Paraboloid tròn xoay



Lát cắt

Lát cắt của một đồ thị là giao điểm của nó với một mặt phẳng.

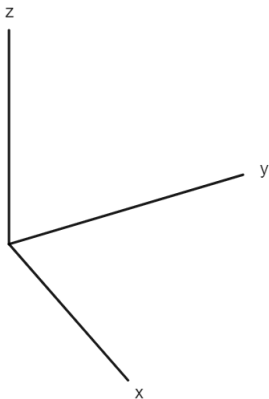
Thông thường, để hình dung và xây dựng đồ thị, ta sử dụng lát cắt từ các mặt phẳng dọc, cụ thể là mặt phẳng $x = 0$ và $y = 0$.



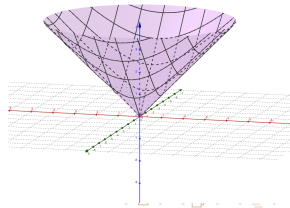
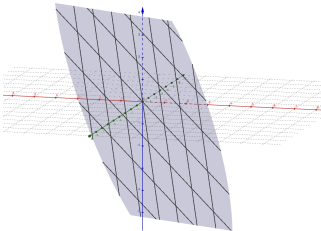
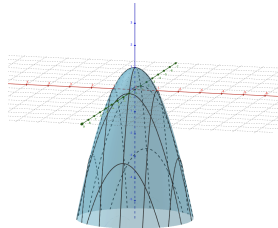
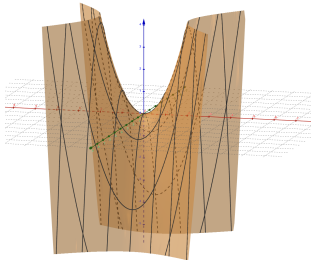
Hình: Lát cắt $x = 0, y = 0$ của đồ thị hàm số $f = x^2 + y^2$.

Vẽ đồ thị hàm số sử dụng lát cắt và đường đồng mức

Xét ví dụ hàm số $f(x, y) = x^2 + y^2$



Quiz



- 1 Giới thiệu
- 2 Hàm đa biến và đồ thị
- 3 Giới hạn và tính liên tục

Quả cầu mở, tập mở

Definition (Quả cầu mở)

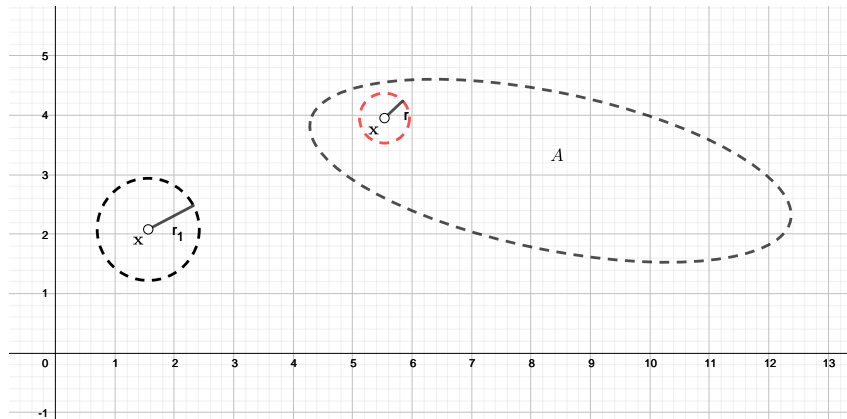
Cho $r > 0$ và $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Quả cầu mở bán kính r với tâm \mathbf{x} là tập hợp các điểm

$$B_r(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n : \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| < r\}.$$

Definition (Tập mở)

Một tập hợp $A \subset \mathbb{R}^n$ được gọi là *tập mở* nếu với mọi $\mathbf{x} \in A$, tồn tại $r > 0$ để $B_r(\mathbf{x}) \subset A$.

Mô tả quả cầu mở, tập mở



Hình: Quả cầu mở và tập mở

Giới hạn của hàm số nhiều biến

Definition

Cho hàm số $f : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ xác định trên một quả cầu mở chứa \mathbf{x}_0 . Một vector \mathbf{b} được gọi là giới hạn của f khi \mathbf{x} tiến tới \mathbf{x}_0 nếu

$$\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0 : \mathbf{x} \in A, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta \Rightarrow |f(\mathbf{x}) - \mathbf{b}| < \epsilon.$$

Ta có thể biểu diễn lại điều kiện " $\mathbf{x} \in A, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| < \delta$ " thành " $\mathbf{x} \in B_\delta(\mathbf{x}_0) \cap A$ ". Ta ký hiệu

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = \mathbf{b}.$$

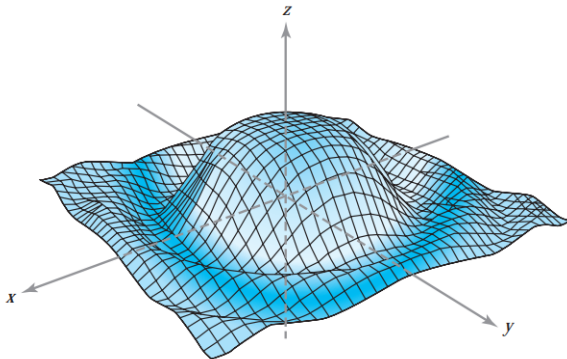
Ví dụ

- ① Tính giá trị

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (1,0)} (x^2 + y^2 + 2).$$

- ② Tính giá trị:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}.$$



Hình: Mô tả hàm số $f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$

Các tính chất của giới hạn hàm số

Theorem

Cho $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}^m$.

- *Giới hạn của hàm f tại x_0 , nếu tồn tại, thì là duy nhất.*
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = c \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.
- *Giả sử $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_m(x))$ với $f_i(x)$ là các hàm số thực, khi đó $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ khi và chỉ khi $\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = b_i$.*

Tính liên tục của hàm số nhiều biến

Definition

Cho f xác định trên một quả cầu mở chứa \mathbf{x}_0 . Hàm số f được gọi là liên tục tại \mathbf{x}_0 nếu

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x}_0).$$

Hàm số được gọi là liên tục nếu nó liên tục tại mọi điểm trên miền xác định của nó.

Nếu không nói gì thêm, miền xác định của tập f được coi là một tập mở.

Các tính chất của hàm số liên tục

Theorem

Cho $f, g : A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, c \in \mathbb{R}$.

- Nếu f liên tục thì cf liên tục.
- Nếu f, g liên tục thì $f + g$ liên tục.
- Nếu $f = (f_1, \dots, f_m)$ với f_i là các hàm số thực, khi đó f liên tục khi và chỉ khi tất cả f_i liên tục.

Bài tập

Hỏi giá trị nào sau đây tồn tại, và nếu có thì bằng bao nhiêu?

- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$
- $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2}{x^2 + y^2}.$

Nếu giới hạn đó tồn tại, hỏi cần thêm điều kiện gì để hàm số f liên tục trên toàn \mathbb{R}^2 ?