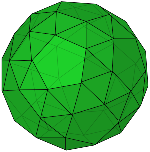
Trace, Norm, Rank

Nguyễn Mạc Nam Trung

Ngày 29 tháng 7 năm 2021

PiMA 2021: The Mathematics of Data Science



Mục lục

Định nghĩa

Định nghĩa (Vết)

Vết của một ma trận vuông A là tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận, kí hiệu là $\mathrm{tr}(A)$.

Định nghĩa

Định nghĩa (Vết)

Vết của một ma trận vuông A là tổng các phần tử trên đường chéo chính của ma trận, kí hiệu là $\mathrm{tr}(A)$.

Nếu A là ma trận vuông cấp n thì

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} A_{ii}.$$

Ví dụ

Ví dụ

Tính vết của các ma trận sau

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{bmatrix}$.
- $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$.

Tính chất

Tính chất 1

Với $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $\mathrm{tr}(A + B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
- $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$.

Tính chất

Tính chất 1

Với $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ và $\alpha \in \mathbb{R}$,

- $\mathrm{tr}(A+B) = \mathrm{tr}(A) + \mathrm{tr}(B)$.
- $\mathrm{tr}(\alpha A) = \alpha \mathrm{tr}(A)$.

Nhận xét

tr là một ánh xạ tuyến tính đi từ $\mathbb{R}^{n\times n}$ vào $\mathbb{R}$.

Tính chất

Tính chất 2

Với $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{R}^{n\times m}$,

$$\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA).$$

Tính chất

Tính chất 2

Với $A, B \in \mathbb{R}^{m\times n}, \mathbb{R}^{n\times m}$,

$$\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA).$$

Chứng minh. Dựa vào công thức nhân ma trận,

$$\mathrm{tr}(AB) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}b_{ji} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m} b_{ji}a_{ij} = \mathrm{tr}(BA).$$

Chuẩn trên không gian vector

Định nghĩa (Chuẩn trên không gian vector)

Cho không gian vector V trên $\mathbb{R}$, chuẩn trên V là một hàm đi từ V vào $\mathbb{R}$, kí hiệu là $||.||$, với các tính chất sau

1. $||v|| \geqslant 0, \forall v \in V$ và $||v|| = 0$ khi và chỉ khi $v = 0$.
2. $||\alpha v|| = |\alpha| ||v||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$.

Chuẩn trên không gian vector

Định nghĩa (Chuẩn trên không gian vector)

Cho không gian vector V trên $\mathbb{R}$, chuẩn trên V là một hàm đi từ V vào $\mathbb{R}$, kí hiệu là $||.||$, với các tính chất sau

1. $||v|| \geqslant 0, \forall v \in V$ và $||v|| = 0$ khi và chỉ khi $v = 0$.
2. $||\alpha v|| = |\alpha|||v||, \forall \alpha \in \mathbb{R}$.
3. $||u + v|| \leqslant ||u|| + ||v||, \forall u, v \in V$.

Nhận xét

Độ dài các véctơ trong $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ (tổng quát là $\mathbb{R}^n$) đều là chuẩn.

Một số chuẩn thông dụng

Định nghĩa (p - norm)

Với mỗi số thực $p \geqslant 1$, định nghĩa $||.||_p : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ như sau

$$||x||_p := (|x_1|^p + |x_2|^p + \cdots + |x_n|^p)^{\frac{1}{p}},$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Định nghĩa (maximum norm)

Định nghĩa $||.||_\infty : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ như sau

$$||x||_\infty := \max\{|x_1|, |x_2|, \ldots, |x_n|\},$$

trong đó $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Một số câu hỏi

Q1.

Độ dài trên $\mathbb{R}^n$ có phải là p - norm không ?

Q2.

Nêu thêm một số chuẩn mà bạn trên $\mathbb{R}^n$. Đề xuất một cách để tạo thêm chuẩn mới từ các chuẩn đã biết.

Chuẩn ma trận

Tập các ma trận vuông $\mathbb{R}^{n\times n}$ là một không gian vector.

Chuẩn ma trận

Tập các ma trận vuông $\mathbb{R}^{n\times n}$ là một không gian vector.
Ma trận có chuẩn không ? Chuẩn nào thường được sử dụng ?

Frobenius norm

Định nghĩa (Frobenius norm)

Định nghĩa $||.||_F : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ như sau

$$||A||_F = \sqrt{\sum_{i,j} A_{ij}^2}.$$

Frobenius norm

Tính chất 1.

Với $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$||A||_F = \sqrt{\mathrm{tr}(AA^T)}.$$

Tính chất 2.

Với $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$,

$$||AB||_F \leqslant ||A||_F ||B||_F.$$

Operator norm

Định nghĩa

Cho $||.||$ là một chuẩn trên $\mathbb{R}^n$. Với mỗi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, định nghĩa

$$||A||_{op} := \sup\{||Ax|| : x \in \mathbb{R}^n \text{ và } ||x|| = 1\}.$$

1. Định nghĩa như vậy có ổn không ?
2. Có thể kiểm tra được $||.||$ là chuẩn ma trận không ?

Giải thích khái niệm

Supremum của một tập $S \subset \mathbb{R}$, kí hiệu $\sup S$, là chặn trên nhỏ nhất của S. Ví dụ với $S = \{-\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ thì $\sup S = 0$.

Tiên đề của tập số thực

Tập con khác rỗng của $\mathbb{R}$ bị chặn trên thì có chặn trên nhỏ nhất.

Operator norm (Special case)

Định nghĩa

Với mỗi $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, định nghĩa

$$\begin{aligned} ||A||_{op2} :&= \sup\{||Ax||_2 : x \in \mathbb{R}^n \text{ và } ||x||_2 = 1\} \\ &= \sup\left\{\frac{||Ax||_2}{||x||_2} : x \in \mathbb{R}^n \text{ và } x \neq 0\right\}. \end{aligned}$$

Operator norm (Special case)

Bước 1 : Kiểm tra sự tồn tại của sup

Xét biểu diễn tuyến tính của x qua cơ sở $\{e_1, \ldots, e_n\}$

$$x = \sum_{i=1}^{n} e_i x_i.$$

Suy ra $||Ax||_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} |x_i|.||Ae_i||_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} ||Ae_i||_2$ hay $||Ax||_2$ bị chặn.

Operator norm (Special case)

Bước 2 : Kiểm tra các tính chất của chuẩn

$$||A||_{op2} = \sup \left\{ \frac{||Ax||_2}{||x||_2} : x \in \mathbb{R}^n \text{ và } x \neq 0 \right\} \geqslant 0.$$

và

$$\begin{aligned} ||A||_{op2} = 0 &\Longleftrightarrow ||Ax||_2 = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow Ax = 0, \forall x \in \mathbb{R}^n \\ &\Longleftrightarrow A = 0. \end{aligned}$$

Operator norm (Special case)

Bước 2 : Kiểm tra các tính chất của chuẩn

$$||\alpha A||_{op2} = \sup\{|\alpha|||Ax||_2 : x \in \mathbb{R}^n \text{ và } ||x||_2 = 1\} = |\alpha|||A||_{op2}.$$

Operator norm (Special case)

Bước 2 : Kiểm tra các tính chất của chuẩn

Với mọi $x \in \mathbb{R}^n$,

$$||(A+B)x||_2 \leqslant ||Ax||_2 + ||Bx||_2 \leqslant ||A||_{op2} + ||B||_{op2}$$

nên $||A+B||_{op2} \leqslant ||A||_{op2} + ||B||_{op2}$.

Operator norm

Tính chất

Với $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ thì

$$||AB||_{op} \leqslant ||A||_{op}||B||_{op}.$$

Định nghĩa

Định nghĩa.

Giả sử A là một ma trận có m dòng và n cột. Không gian cột $C(A)$ là không gian sinh bởi các véctơ cột của ma trận A. Không gian dòng $R(A)$ là không gian sinh bởi các véctơ dòng của ma trận A.

Ví dụ

Ví dụ 1.

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 5 \\ 4 & 4 & 8 \end{bmatrix}$. Tính $\dim R(A), \dim C(A)$.

Ví dụ

Ví dụ 2.

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$. Tính $\dim R(A), \dim C(A)$.

Hạng của ma trận

Định nghĩa.

Hạng của ma trận A là số chiều của không gian dòng của ma trận đó, kí hiệu là $r(A)$.

Các tính hạng của ma trận

Ý tưởng : Đưa ma trận về dạng bậc thang.

$$\begin{bmatrix} 1 & * & * & * & * \\ 0 & 1 & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Làm sao để đưa về dạng bậc thang ?

Phép khử Gauss : Ý tưởng là hạng (không gian dòng) của ma trận không đổi khi thực hiện ba phép đổi sơ cấp sau

1. hoán vị hai dòng : $r_i \leftrightarrow r_j$.
2. nhân một dòng với $\alpha \neq 0$: $r_i := \alpha r_i$.
3. cộng một dòng với α lần dòng khác : $r_i := r_i + \alpha r_j$.

Ví dụ

Ví dụ.

Cho ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix}$. Tính $r(A)$.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow r(A) = 2.$$

Định lý

Định lý 1.

Cho ma trận A, khi đó

$$\dim R(A) = r(A)..$$

Định lý

Định lý 2.

Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ có ma trận biểu diễn f qua cặp cơ sở S, T là A. Khi đó,

$$\dim \operatorname{Im}(f) = r(A).$$

Tính chất

Tính chất

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times p}$. Khi đó,

1. $r(A) = r(A^T)$
2. $r(A) \leqslant \min\{m, n\}$.
3. $r(AB) \leqslant \min\{r(A), r(B)\}$.
4. $r(AA^T) = r(A)$.

Tìm hiểu thêm về ma trận full rank

Ta nói ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ full rank nếu $r(A) = n$.

Định lý

Định lý

Ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ khả nghịch khi và A full rank.

Kiểm tra sự tồn tại nghịch đảo của ma trận

Đối với các ma trận cấp nhỏ, người ta có một công cụ để kiểm tra (tìm) nghịch đảo ma trận. Đó là tính định thức của ma trận và kiểm tra định thức có khác 0 hay không.

Định thức

Định nghĩa

Cho $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, định thức của ma trận A, ký hiệu là $\det A$, được định nghĩa

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \left(\operatorname{sgn}(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}\right),$$

trong đó $\operatorname{sgn}(\sigma) = \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} \dfrac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$.

Ví dụ

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ad - bc.$$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \Rightarrow \det A = ?$$

Tính chất

Tính chất

Cho ma trận $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Khi đó

1. $\det(AB) = \det A \cdot \det B$.
2. $\det A^T = \det A$.,

Định lý

Định lý

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, các mệnh đề sau đây là tương đương

1. A khả nghịch,
2. $r(A) = n$,
3. $Ax = 0$ có nghiệm $x \in \mathbb{R}^n$ duy nhất là $x = 0$,
4. $\det A \neq 0$.