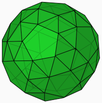

Không gian vector

PiMA 2021: The Mathematics of Data Science

Nguyễn Thị Minh Thư

Ngày 26 tháng 7 năm 2021

Mục lục

Không gian vector

Không gian vector

Không gian vector V là một tập hợp các đại lượng vectors, sao cho các đại lượng này có thể cộng với nhau $(\mathbf{u} + \mathbf{v})$ và nhân vô hướng với một số $c\mathbf{u}$ đồng thời thỏa mãn 10 tiên đề.

Không gian vector

Nếu V thỏa mãn 10 tiên đề sau, thì V được gọi là một không gian vector với các đại lượng của V là những vectors:

1. $\mathbf{u}+\mathbf{v} \in V,\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V$
2. $\mathbf{u}+\mathbf{v} = \mathbf{v}+\mathbf{u},\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V$
3. $(\mathbf{u}+\mathbf{v})+\mathbf{w} = \mathbf{u}+(\mathbf{v}+\mathbf{w}),\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w} \in V$
4. $\exists \mathbf{0} \in V$ thỏa $\forall \mathbf{u} \in V$: $\mathbf{u}+\mathbf{0} = \mathbf{u}$
5. $\forall \mathbf{u} \in V,\ \exists -\mathbf{u} \in V$: $\mathbf{u}+(-\mathbf{u}) = 0$
6. $c\mathbf{u} \in V,\ \forall \mathbf{u} \in V,\ \forall c \in \mathbf{R}$
7. $c(\mathbf{u}+\mathbf{v}) = c\mathbf{u}+c\mathbf{v},\ \forall \mathbf{u},\mathbf{v} \in V,\ \forall c \in \mathbf{R}$
8. $(c+d)\mathbf{u} = c\mathbf{u}+d\mathbf{u},\ \forall \mathbf{u} \in V,\ \forall c,d \in \mathbf{R}$
9. $c(d\mathbf{u}) = (cd)\mathbf{u},\ \forall \mathbf{u} \in V,\ \forall c,d \in \mathbf{R}$
10. $1(\mathbf{u}) = \mathbf{u},\ \forall \mathbf{u} \in V$

Ví dụ

1. Trong không gian R^n:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ ... \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 + v_1 \\ u_2 + v_2 \\ ... \\ u_n + v_n \end{bmatrix}$$

$$k \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ ... \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_1 \\ ku_2 \\ ... \\ ku_n \end{bmatrix}, \ k \in \mathbb{R}$$

Ví dụ

3. $V = P_n$ (tập hợp tất cả các đa thức có bậc n hoặc nhỏ hơn)
Với mỗi cặp đa thức $p(x)$, $q(x)$ có dạng:

$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$$
$$q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + ... + b_mx^m$$

$+$ Nếu m $=$ n:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_n + b_n)x^n$$

$+$ Nếu m $<$ n:

$$p(x) + q(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + ... + (a_m + b_m)x^m + a_{m+1}x^{m+1} + ... + a_nx^n$$

$$kp(x) = ka_0 + ka_1x + ka_2x^2 + ... + ka_nx^n$$

Ví dụ

4. $V = C(-\infty, \infty)$ (tập hợp tất cả các hàm số thực liên tục trên $\mathbb{R}$)
Cho 2 hàm số $f, g \in C(-\infty, \infty)$

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(kf)(x) = kf(x)$$

Bài tập

Bài tập 1: Chứng minh tập hợp các số nguyên không phải là một không gian vector.

Bài tập

Bài tập 1: Chứng minh tập hợp các số nguyên không phải là một không gian vector.

Giải:

Ta có $1 \in V$ và 0.5 là một số thực

Vì $0.5 \times 1 = 0.5 \notin V$

$\implies$ Điều phải chứng minh

Không gian vector con

Cho V là một không gian vector, $W \neq \emptyset$ và $W \subseteq V$. W là không gian vector con của V khi và chỉ khi thỏa 2 điều kiện sau:

1. $\forall u, v \in W$: $u + v \in W$

2. $\forall u \in W$: $cu \in W$

Không gian vector con

Nhận xét: Mỗi không gian vector V có ít nhất 2 không gian vector con:

- Không gian vector $\{\mathbf{0}\}$ là một không gian con của V

- V là một không gian con của V

Ví dụ

$W = \{(x_1, x_2, 1) | x_1, x_2 \in R\}$

Chọn $v = (0, 0, 1) \in W$

$\Rightarrow (-1)v = (0, 0, -1) \notin W$

$\Rightarrow$ W không phải là không gian vector con của R^3

Bài tập

1. Tập hợp nào sau đây là không gian vector?

A. $\mathbb{Z}$ B. P_n C. Tập hợp các đa thức có bậc lớn hơn 2

Bài tập

2. $W = \{(x_1, x_1 + x_2, x_2) | x_1, x_2 \in R \setminus \{0\}\}$. W có là không gian vector con của R^3 không ?

Bài tập

$W = \{(x_1, x_1 + x_2, x_2) | x_1, x_2 \in R \setminus \{0\}\}$. W có là không gian vector con của R^3 không ?

Giải:

Cho $u = (u_1, u_1 + u_2, u_2) \in W$ và $v = (v_1, v_1 + v_2, v_2) \in W$, $u \neq v$

Chọn $c = 0 \in R$

$0u = (0, 0, 0) \notin W \implies W$ không là không gian vector con của R^3

Tổ hợp tuyến tính

Tổ hợp tuyến tính

Định nghĩa: $A = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, một tổ hợp tuyến tính của A là một vector và có thể được biểu diễn dưới dạng

$$\alpha_1 V_1 + \alpha_2 V_2 + \cdots + \alpha_n V_n$$

Với $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$

Ví dụ

Cho $V = (V_1, V_2)$ là tổ hợp tuyến tính của $v_1 = (v_{11}, v_{12})$ và $v_2 = (v_{21}, v_{22})$.

$\Rightarrow \exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} V_1 = \alpha_1 v_{11} + \alpha_2 v_{12} \\ V_2 = \alpha_1 v_{21} + \alpha_2 v_{22} \end{cases}$$

$\Rightarrow V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2,\ \alpha_1, \alpha_2 \in R$

Ví dụ: $V = (5,1)$ là tổ hợp tuyến tính của $v_1 = (1,2)$ và $v_2 = (2,3)$ vì

$$(5,1) = -13(1,2) + 9(2,3)$$

Bài tập

$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ và $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, vector nào sau đây là tổ hợp tuyến tính của 3 vector đã cho.

A. $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ B. $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ C. $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ D. $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Bài tập

Cho $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ và $v_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Chứng minh: $w = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ là tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3

Bài tập

Cho $v_1 = (1,2,3)$, $v_2 = (0,1,2)$ và $v_3 = (-1,0,1)$.

Chứng minh: $w = (1,1,1)$ là tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3

Giải:

$w = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

$$\begin{cases} 1 = c_1 \times 1 + c_2 \times 0 + c_3 \times (-1) \\ 1 = c_1 \times 2 + c_2 \times 1 + c_3 \times 0 \\ 1 = c_1 \times 3 + c_2 \times 2 + c_3 \times 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = 1 + t,\ c_2 = -1 - 2t,\ c_3 = t$

Chọn t = 1: $c_1 = 2,\ c_2 = -3,\ c_3 = 1$

$\Rightarrow w = 2v_1 - 3v_2 + v_3$

Span

Span

Định nghĩa: Nếu $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một tập hợp các vector trong không gian vector V, thì span của S là tập hợp của tất cả các tổ hợp tuyến tính của các vector trong S hay ta nói S sinh ra V.

Ký hiệu: span(S) hay $\langle S \rangle$

$$span(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Span

$$span(S) = \{\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + ... + \alpha_n v_n \mid \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

Khi đó:

1. $span(S)$ là không gian con của V
2. $span(S)$ là không gian con nhỏ nhất của V chứa S

Chứng minh

1. $span(S)$ là không gian con của V

Giả sử $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n$, $v = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \cdots + \beta_n v_n \in span(S)$

$$u + v = (\alpha_1 + \beta_1) v_1 + (\alpha_2 + \beta_2) v_2 + \cdots + (\alpha_n + \beta_n) v_n \in span(S)$$

Chứng minh

$ku = k(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_n v_n) = k\alpha_1 v_1 + k\alpha_2 u_2 + \dots + k\alpha_n u_n \in span(S)$, $k \in \mathbb{R}$

$\implies$ Điều phải chứng

Chứng minh

2. *span*(S) là không gian con nhỏ nhất của V chứa S

Giả sử $U \subset V,\ U \supset S$, ta cần chứng minh $span(S) \subset U$

Chọn $u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in span(S)$,

trong đó $v_1, v_2, \ldots, v_n \in S$

Vì $S \subset U \Rightarrow\ v_1, v_2, \ldots, v_n \in U$

$\Rightarrow\ u = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n \in U$ vì $U \subset V$

Vì $\forall u \in span(S),\ u \in U \Rightarrow span(S) \subset U \Rightarrow$ Điều phải chứng minh

Ví dụ

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$ sinh ra R^3 vì $\forall u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \in R^3$ đều có thể được biểu diễn dưới dạng:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = u_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + u_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + u_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Độc lập tuyến tính

Định nghĩa

$S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một tập hợp các vector trong không gian vector V. Cho $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$.

- Nếu $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ là nghiệm duy nhất, thì hệ vector S được gọi là độc lập tuyến tính.
- Nếu tồn tại nghiệm $c_1, c_2, ..., c_n$ sao cho $\exists c_i \neq 0$, $i = \overline{1, n}$, thì hệ vector S được gọi là phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Xác định hệ vector S là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Ví dụ

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Xác định hệ vector S là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Xét $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

$$\begin{cases} c_1 - 2c_3 = 0 \\ 2c_1 + c_2 = 0 \\ 3c_1 + 2c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$\Rightarrow$ S độc lập tuyến tính

Bài tập

Cho $S = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1 + x - 2x^2, 2 + 5x - x^2, x + x^2\}$. Xác định hệ vector S là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Bài tập

Cho $S = \{v_1, v_2, v_3\} = \{1 + x - 2x^2, 2 + 5x - x^2, x + x^2\}$. Xác định hệ vector S là độc lập tuyến tính hay phụ thuộc tuyến tính.

Giải:

Xét $c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 = 0$

$c_1(1 + x - 2x^2) + c_2(2 + 5x - x^2) + c_3(x + x^2) = 0 + 0x + 0x^2$

$$\begin{cases} c_1 + 2c_2 = 0 \\ c_1 + 5c_2 + c_3 = 0 \\ -2c_1 - c_2 + c_3 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $c_1 = 2, c_2 = -1, c_3 = 3$ là một đáp án

$\Rightarrow$ S phụ thuộc tuyến tính

Tính chất của phụ thuộc tuyến tính

$S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $n \geq 2$ được cho là phụ thuộc tuyến tính khi và chỉ khi tồn tại một $v_i \in S$ có thể được viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của những vector khác trong S.

Chứng minh

($\Rightarrow$)

Xét $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_n v_n = 0$

Vì S phụ thuộc tuyến tính nên $\exists c_i \neq 0$

$$\implies v_i = \left(-\frac{c_1}{c_i}\right) v_1 + \cdots + \left(-\frac{c_{i-1}}{c_i}\right) v_{i-1} + \left(-\frac{c_{i+1}}{c_i}\right) v_{i+1} + \cdots + \left(-\frac{c_n}{c_i}\right) v_n$$

($\Leftarrow$)

Giả sử $v_i = d_1 v_1 + \cdots + d_{i-1} v_{i-1} + d_{i+1} v_{i+1} + \cdots + d_n v_n$

$\Leftrightarrow d_1 v_1 + \cdots + d_{i-1} v_{i-1} + (-1) v_i + d_{i+1} v_{i+1} + \cdots + d_n v_n = 0$

$\implies c_1 = d_1, c_2 = d_2, \ldots, c_i = -1, \ldots, c_n = d_n$

$\implies$ S phụ thuộc tuyến tính

Cơ sở

Cơ sở

Định nghĩa:

Cho không gian vector V, và $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$

- S sinh ra V hay $span(S) = V$
- S độc lập tuyến tính

$\implies$ S là một cơ sở của V

Cơ sở chính tắc

R^3

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

R^n

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}, ..., \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ ... \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

Cơ sở

Cho $S = \{v_1, v_2, ..., v_n\}$ là một cơ sở của không gian vector V

Định lý:

1. Mọi vector trong V đều có thể viết dưới dạng tổ hợp tuyến tính của những vector trong S với các hệ số là duy nhất.
2. Những tập hợp có nhiều hơn n vector đều phụ thuộc tuyến tính.
3. Nếu không gian vector V có một cơ sở với n vector, thì mọi cơ sở của V đều có n vector, ta nói n là số chiều của V, kí hiệu $\dim(V) = n$.

Ví dụ

Cho $S = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \; v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \; v_4 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Xét $a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + a_4 v_4 = 0$

$$\begin{cases} a_1 + a_4 = 0 \\ a_2 + 2a_3 = 0 \\ a_1 - a_2 + 2a_3 = 0 \\ 2a_2 + a_3 + a_4 = 0 \end{cases}$$

$\implies a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$

Ví dụ

Cho $v = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} \in R^4$ với $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Giả sử $v = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 + \alpha_4 v_4$$

$\implies \alpha_1 = 2, \alpha_2 = 1, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = -1$

$\implies S$ là cơ sở của R^4

Bài tập

1. Cho $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$, $v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Chứng minh $v = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$ là tổ hợp tuyến tính của v_1, v_2, v_3.

Bài tập

2. Chứng minh tập hợp các đa thức bậc 2 không phải là một không gian vector.

3. Vector $u = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+2b \end{bmatrix}$ được sinh bởi các vector nào sau đây:

A. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ B. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$

C. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ D. $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$

Bài tập

4. $u = \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+2b \end{bmatrix}$, $a, b \in \mathbb{R}$ có phải là không gian con của R^3 không?
Tại sao?

Bài tập

5. Cho các đa thức bậc 2 sau:

$$v_1 = 2t^2 + t + 2,\ v_2 = t^2 - 2t,\ v_3 = 5t^2 - 5t + 2,\ v_4 = -t^2 - 3t - 2$$

Nhận định $v = t^2 + t + 2 \in span\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ là đúng hay sai? Tại sao?

Bài tập

6.

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

có phải là cơ sở của R^3 không? Tại sao?

Tài liệu tham khảo

Bernard Kolman and David R. Hill.
Elementary Linear Algebra with Applications - 9th edition.
Pearson, 2007.