# Vector và tích vô hướng

PiMA 2021: The Mathematics of Data Science

**Nguyen Thi Minh Thu**

Ngày 26 tháng 7 năm 2021

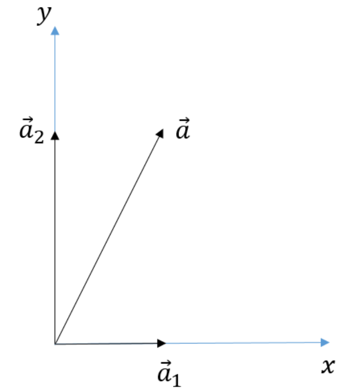
# Mục lục

# Vector

# Vector

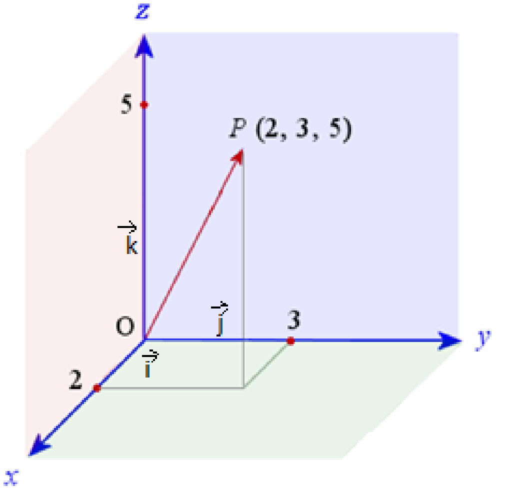
Định nghĩa: Vector là một đoạn thẳng có hướng.

Ví dụ: $\overrightarrow{a} = (1, 2)$



# Vector

Ví dụ: $\overrightarrow{\mathrm{P}} = (2,\ 3,\ 5)$



# Không gian các tọa độ thực

Với n là số nguyên không âm, $R^n$ được ký hiệu là không gian n chiều trên R.

$$R^n = \{X = (x_1, x_2, x_3, ..., x_n) \mid x_1, x_2, x_3, ..., x_n \in R\}$$

# Không gian các tọa độ thực

n $= 1$: $R^1$ - tập hợp tất cả các số thực, biểu diễn trên trục số

n $= 2$: $R^2$ - tập hợp các cặp số thực $(x_1, x_2)$, biểu diễn trên mặt phẳng Oxy

n $= 3$: $R^3$ - tập hợp bộ ba số thực $(x_1, x_2, x_3)$, biểu diễn trên trục tọa độ Oxyz

# Vector dòng và vector cột

Vector dòng n chiều, $R^n$ là tập các ma trận dòng với n phần tử (ma trận cấp $1 \times n$).

Ví dụ: x $= \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & ... & x_n \end{bmatrix}$

Vector cột n chiều, $R^n$ là tập các ma trận cột với n phần tử (ma trận cấp $n \times 1$).

Ví dụ: x $= \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix}$

# Vector không

Dòng: $0 = [0 \quad 0 \quad 0 \quad ... \quad 0]$

Cột: $0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ ... \\ 0 \end{bmatrix}$

# Hai vector bằng nhau

Cho x $= (x_1, x_2, x_3, ..., x_n)$, y $= (y_1, y_2, y_3, ..., y_n) \in R^n$

$$\mathrm{x} = \mathrm{y} \Leftrightarrow x_1 = y_1,\ x_2 = y_2,\ x_3 = y_3,\ ...,\ x_n = y_n$$

# Phép cộng

Cho $\overrightarrow{a_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , $\overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow \overrightarrow{a_1} + \overrightarrow{a_2} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

# Phép cộng

Vector dòng:

$$(x_1, x_2, ..., x_n) + (y_1, y_2, ..., y_n) = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ ...,\ x_n + y_n)$$

Vector cột:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ ... \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ ... \\ x_n + y_n \end{bmatrix}$$

## Tích vô hướng của vector với một số

Cho c $= 3$, và $\overrightarrow{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow c\overrightarrow{a} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix}$

# Nhân vector với một số (scalar product)

Vector dòng:

$$\alpha x = \alpha(x_1, x_2, x_3, ..., x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3, ..., \alpha x_n),\ \forall \alpha \in R,\ \forall x \in R^n$$

Vector cột:

$$\alpha x = \alpha \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ... \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \alpha x_3 \\ ... \\ \alpha x_n \end{bmatrix},\ \forall \alpha \in R,\ \forall x \in R^n$$

Vector đối của x: (-1)x = -x, $\forall x \in R^n$

# Các tính chất của phép toán tuyến tính

Với $\forall x, y, z \in R^n$ và $\forall a, b \in R$

a. x + y là một vector trong $R^n$

b. x + y = y + x

c. (x + y) + z = x + (y + z)

d. x + 0 = 0 + x = x

e. x + (-x) = (-x) + x = 0

f. a(x + y) = ax + ay

g. (a + b)x = ax + bx

h. (ab)x = a(bx) = b(ax)

i. 1.x = x

# Tích vô hướng (dot product)

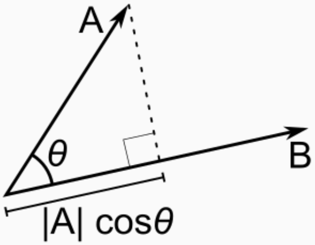
# Định nghĩa hình học

Tích vô hướng của hai vector là tích của độ lớn của một vector và độ lớn của phép chiếu vuông góc của vector còn lại lên nó.

Ví dụ: Cho 2 vector $\overrightarrow{A}$ và $\overrightarrow{B}$

$\implies \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \, \|\overrightarrow{B}\| \, cos(\theta)$

Với $\|\overrightarrow{A}\|$ và $\|\overrightarrow{B}\|$ là độ lớn của $\overrightarrow{A}$ và $\overrightarrow{B}$, và $\theta$ là góc giữa $\overrightarrow{A}$ và $\overrightarrow{B}$.



# Chuẩn của vector - Norm

Định nghĩa: Chuẩn của một vector hay độ lớn của một vector là khoảng cách Euclid giữa điểm cuối cùng của vector với gốc tọa độ.

Ví dụ: Cho vector $\overrightarrow{\mathrm{A}} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n)$

$$\| \overrightarrow{\mathrm{A}} \| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + ... + a_n^2}$$

# Các trường hợp đặc biệt

$\overrightarrow{A}$ và $\overrightarrow{B}$ vuông góc: $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \, \|\overrightarrow{B}\| \, cos(\theta) = 0$

$\overrightarrow{A}$ và $\overrightarrow{B}$ trùng nhau: $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \, \|\overrightarrow{B}\| \, cos(\theta) = \|\overrightarrow{A}\| \|\overrightarrow{B}\|$

$\implies \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = \|\overrightarrow{A}\|^2$

# Ý nghĩa hình học của tích vô hướng

Kết quả của tích vô hướng là một con số (scalar), thể hiện sự tương quan giữa hướng và độ lớn của 2 vector.

Đặt S $= \overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B}}$

Tương quan về hướng:

a. S $> 0 \implies \overrightarrow{\mathrm{A}}$ và $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ cùng hướng

b. S $< 0 \implies \overrightarrow{\mathrm{A}}$ và $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ ngược hướng

c. S $= 0 \implies \overrightarrow{\mathrm{A}}$ và $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ vuông góc với nhau

Tương quan về độ lớn: giả sử độ dài của $\| \overrightarrow{\mathrm{A}} \| = \| \overrightarrow{\mathrm{B}} \| = 1$

a. $|S|$ lớn: độ lớn góc của 2 vector lớn (2 góc nằm xa góc $\frac{\pi}{2}$)

b. $|S|$ nhỏ: độ lớn góc của 2 vector nhỏ.

# Bài tập

Cho $\overrightarrow{\mathrm{u}} = (3, 2)$ và $\overrightarrow{\mathrm{v}} = (5, -1)$. Tìm $\overrightarrow{\mathrm{u}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{v}}$.

## Bài tập

Cho $\overrightarrow{u} = (3, 2)$ và $\overrightarrow{v} = (5, -1)$. Tìm $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Giải:

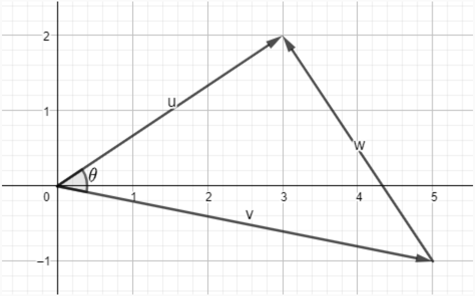
$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26}$$

$$cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{3.5+2.(-1)}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{13}{\sqrt{13}\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\implies \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \sqrt{13}.\sqrt{26}.\frac{\sqrt{2}}{2} = 13$$

# Định nghĩa đại số




trong đó $\overrightarrow{u} = (3,2)$, $\overrightarrow{v} = (5,-1)$, $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v}$

# Định nghĩa đại số

Tổng quát $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ và $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$

$$\| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2 = \| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - 2 \| \overrightarrow{u} \| \| \overrightarrow{v} \| \cos\theta$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \frac{\| \overrightarrow{u} \|^2 + \| \overrightarrow{v} \|^2 - \| \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v} \|^2}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = \frac{u_1^2 + u_2^2 + v_1^2 + v_2^2 - [(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2]}{2}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{u}\,\overrightarrow{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

# Định nghĩa đại số

Tích vô hướng của 2 vector $\overrightarrow{\mathrm{A}}$ và $\overrightarrow{\mathrm{B}}$ hay $\overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B}}$ với

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} = (a_1, a_2, a_3, ..., a_n) \text{ và } \overrightarrow{\mathrm{B}} = (b_1, b_2, b_3, ..., b_n)$$

được định nghĩa là

$$\overrightarrow{\mathrm{A}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{B}} = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

1. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a}$
2. $\overrightarrow{a}(\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}) = \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}$
3. $(k\overrightarrow{a})\overrightarrow{b} = k(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}) = \overrightarrow{a}(k\overrightarrow{b}),\ k \in \mathbb{R}$
4. $\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} \geq 0,\ \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{a} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = 0$
5. Bất đẳng thức Cauchy-Schwarz

$$|\overrightarrow{u}\overrightarrow{v}| \leq \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\|$$

6. Bất đẳng thức tam giác

$$\|\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}\| \leq \|\overrightarrow{u}\| + \|\overrightarrow{v}\|$$

# Ví dụ

Cho $\overrightarrow{u} = (3, 2)$ và $\overrightarrow{v} = (5, \text{-}1)$. Tìm $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

Giải:

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3.5 + 2.(\text{-}1) = 13$$

# Bài tập

1. Cho 3 vector: $\overrightarrow{\mathrm{u}} = (1, 3, -5)$, $\overrightarrow{\mathrm{v}} = (4, 2, 0)$, $\overrightarrow{\mathrm{w}} = (-3, 1, 4)$. Tìm tích vô hướng cho từng cặp vector và sắp xếp theo thứ tự giảm dần. Rút ra nhận xét về hướng của các vector.

# Bài tập

2. Cho 2 vector: $u = (-1, 2, 0)$, $v = (3, 1, -2)$. Nhận xét nào sau đây đúng:

A. $\|u\| + \|v\| \leq \|u + v\|$

B. $|\|u\| - \|v\|| \geq \|u - v\|$

C. $|\|u\| + \|v\|| \leq \|u - v\|$

D. $\|u + v\| \leq \|u - v\|$

# Tài liệu tham khảo


Bernard Kolman and David R. Hill.
**Elementary Linear Algebra with Applications - 9th edition.**
Pearson, 2007.