Giá trị riêng, Vector riêng

Nguyễn Mạc Nam Trung

PiMA 2021

Trình bày: Nguyễn Mạc Nam Trung, Đại học KHTN TpHCM

July 29, 2021

Contents

Contents

Bài toán mở đầu

Bài toán. Cho ánh xạ tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tìm cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^n$ sao cho ma trận biểu diễn f có dạng đơn giản nhất.

Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Định nghĩa (Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính)

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. $c \in \mathbb{R}$ được gọi là trị riêng của f nếu tồn tại $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $f(v) = cv$. Ta nói v là vector riêng ứng với trị riêng c. Tập hợp các trị riêng của f được gọi là phổ của f.

Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 1

Cho ánh xạ đồng nhất $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tìm giá trị riêng của f và vector riêng tương ứng.

Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 1

Cho ánh xạ đồng nhất $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$. Tìm giá trị riêng của f và vector riêng tương ứng.

Nếu c là giá trị riêng thì tồn tại $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $f(v) = cv$. Suy ra $c = 1$ và vector riêng tương ứng là $v \in \mathbb{R}^n$ bất kì, $v \neq 0$.

Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
Tìm giá trị riêng của f và vector riêng tương ứng.

Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị riêng của f và vector riêng tương ứng.

Nếu c là giá trị riêng thì tồn tại $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sao cho

$$f(x, y) = c(x, y) \iff (y, x) = (cx, cy) \iff \begin{cases} y = cx \\ x = cy \end{cases}.$$

Suy ra $c^2 = 1$.

- $c = 1$, các vector riêng tương ứng là (x, x) với $x \neq 0$.
- $c = -1$, các vector riêng tương ứng là $(x, -x)$ với $x \neq 0$.

Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$ với $x, y \in \mathbb{R}$.
Tìm giá trị riêng của f và vector riêng tương ứng.

Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính

Ví dụ 2

Cho toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (y, x)$ với $x, y \in \mathbb{R}$. Tìm giá trị riêng của f và vector riêng tương ứng.

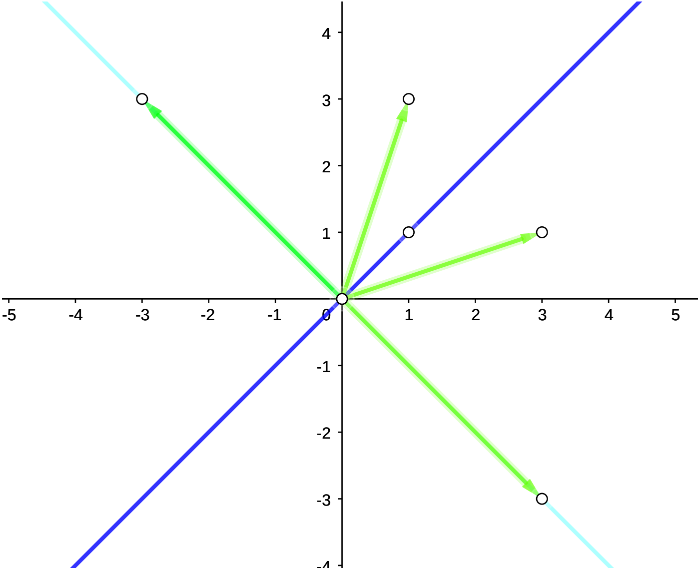
Nếu c là giá trị riêng thì tồn tại $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ sao cho

$$f(x, y) = c(x, y) \iff (y, x) = (cx, cy) \iff \begin{cases} y = cx \\ x = cy \end{cases}.$$

Suy ra $c^2 = 1$.

- $c = 1$, các vector riêng tương ứng là (x, x) với $x \neq 0$.
- $c = -1$, các vector riêng tương ứng là $(x, -x)$ với $x \neq 0$.

Trị riêng và vector riêng của ánh xạ tuyến tính



Ma trận đồng dạng

Định nghĩa (Ma trận đồng dạng)

Hai ma trận $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ được gọi là đồng dạng với nhau nếu tồn tại một toán tử tuyến tính $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ sao cho A, B là ma trận biểu diễn của f theo cơ sở nào đó.

Định lý

Hai ma trận $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ đồng dạng với nhau khi và chỉ khi tồn tại ma trận $P \in \mathbb{R}^{n\times n}$ sao cho

$$A = P^{-1}BP.$$

Ví dụ

Ví dụ

Cho ánh xạ đồng nhất $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ và toán tử tuyến tính $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ thể hiện phép đối xứng qua đường thẳng $y = x$.

1. Tìm ma trận biểu diễn của f, g theo cơ sở chính tắc.
2. Các ma trận trên có đồng dạng với ma trận đường chéo không ?

Ví dụ

Ma trận biểu diễn của f là I_n.
Ma trận biểu diễn của g là $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. A đồng dạng với ma trận đường chéo tương đương với tồn tại $P \in \mathbb{R}^{2\times 2}$

$$\iff P^{-1}AP = \begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix} \iff AP = P\begin{bmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & a_2 \end{bmatrix}.$$

Viết $P = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 \end{bmatrix}$ với v_1, v_2 là các vector cột của P. Ta được

$$\begin{bmatrix} Av_1 & Av_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1v_1 & a_2v_2 \end{bmatrix} \iff Av_i = a_iv_i.$$

Ma trận và ánh xạ tuyến tính

Xét toán tử tuyến tính f có ma trận biểu diễn qua cơ sở chính tắc là A. Xét $x \in \mathbb{R}^n$,

$$f(x) = Ax.$$

Trị riêng và vector riêng của ma trận

Định nghĩa (Trị riêng và vector riêng của ma trận)

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$. $c \in \mathbb{R}$ được gọi là trị riêng của A nếu tồn tại $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ sao cho $Av = cv$. Ta nói v là vector riêng ứng với trị riêng c. Tập hợp các trị riêng của A được gọi là phổ của A.

Đa thức đặc trưng

Giả sử c là trị riêng của A với vector riêng tương ứng là v thì

$$Av = cv \Longleftrightarrow (A - cI_n)v = 0,$$

do $v \neq 0$ nên $\det(A - cI_n) = 0$. Như vậy mọi trị riêng của A đều là nghiệm của đa thức

$$P_A(x) = \det(A - xI_n).$$

Người ta gọi đa thức $P_A(x)$ là đa thức đặc trưng của ma trận A.

Tính chất

Tính chất

Cho $A, B \in \mathbb{R}^{n \times n}$. Khi đó

1. $P_A(x)$ là đa thức hệ số thực có bậc n.
2. $P_A \equiv P_B$ nếu A, B đồng dạng.
3. A khả nghịch khi và chỉ khi $P_A(0) \neq 0$.

Contents

Định nghĩa

Định nghĩa (Chéo hóa được)

Một ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ được gọi là chéo hóa được trong $\mathbb{R}$ nếu tồn tại ma trận đường chéo D sao cho A và D đồng dạng.

Ví dụ

Ví dụ 1.

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ có chéo hóa được hay không ?

Ta cần tìm P sao cho $P^{-1}AP = D$. Trị riêng của A là $-1, 1$.

- Vector riêng ứng với trị riêng 1 là $\begin{bmatrix} x \\ x \end{bmatrix}$ với $x \neq 0$.
- Vector riêng ứng với trị riêng -1 là $\begin{bmatrix} -x \\ x \end{bmatrix}$ với $x \neq 0$.

Ta cũng có nhận xét là nếu v_1, v_2 là vector cột của P thì v_1, v_2 là các vector riêng. P khả nghịch nên v_1, v_2 phải là vector riêng của hai trị riêng khác nhau.

Ví dụ

Ví dụ 1

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ có chéo hóa được hay không ?

Chọn $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ thì $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D$.

Định lý về chéo hóa ma trận

Định lý

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. A chéo hóa được khi và chỉ khi tồn tại cơ sở $\mathcal{B}$ của $\mathbb{R}^n$ chứa toàn vector riêng của A.

Ví dụ

Ví dụ 2.

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ có chéo hóa được hay không ?

Giả sử c là trị riêng với vector riêng tương ứng là $v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$, ta được

$$Av = cv \iff \begin{cases} v_1 + 2v_2 = cv_1 \\ v_2 = cv_2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 1 \\ v_2 = 0 \end{cases}.$$

Vậy $c = 1$ là trị riêng với vector riêng tương ứng là $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^*$.

Ví dụ

Ví dụ 2.

Ma trận $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ có chéo hóa được hay không ?

Do không gian sinh bởi các vector $\begin{bmatrix} x \\ 0 \end{bmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^*$ có số chiều là 1 nên A không chéo hóa được.

Không gian con riêng

Định nghĩa (Không gian con riêng)

Với a là trị riêng của ma trận $\mathrm{A} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}\times\mathrm{n}}$ thì

$$\mathrm{E}(a) := \{\mathrm{v} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n}} \mid \mathrm{Av} = a\mathrm{v}\}$$

là không gian con của $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ và ta gọi nó là không gian con riêng của $\mathbb{R}^{\mathrm{n}}$ ứng với trị riêng a.

Định lý về chéo hóa ma trận

Định lý

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ có các giá trị riêng là $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Ma trận A chéo hóa được khi và chỉ khi

$$\sum_{i=1}^{k} \mathsf{dim}\, E(a_i) = n.$$

Contents

Tính lũy thừa ma trận

Giả sử ma trận vuông A chéo hóa được, tức tồn tại ma trận vuông P sao cho $P^{-1}AP = D$ là ma trận đường chéo. Suy ra

$$A = PDP^{-1} \Rightarrow A^n = PDP^{-1}PDP^{-1} \ldots PDP^{-1} = PD^nP^{-1}.$$

Tìm công thức tổng quát dãy số

Cho dãy số (x_n) xác định bởi $x_{n+2} = ax_{n+1} + bx_n$. Ta có thể tìm công thức tổng quát bằng cách xét $X_n = \begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix}$ và $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ và

$$X_{n+1} = AX_n \Rightarrow X_n = A^{n-1}X_1$$

nên ta có thể quy về bài toán lũy thừa ma trận.

Contents

Định nghĩa

Định nghĩa (Ma trận đối xứng)

Ma trận vuông A được gọi là đối xứng nếu $A = A^T$.

Định lý

Định lý 1.

Ma trận thực đối xứng cấp n chéo hóa được.

Định lý

Định lý 2.

Ma trận thực đối xứng A cấp n trực giao hóa được, tức là tồn tại ma trận đường chéo D, ma trận trực giao P sao cho

$$A = P^{-1}DP.$$

Contents

Định nghĩa

Định nghĩa (Ma trận xác định dương)

Ma trận thực đối xứng được gọi là xác định dương nếu tất cả giá trị riêng của nó đều là số dương.

Định lý

Định lý

Ma trận thực đối xứng A cấp n xác định dương khi và chỉ khi với mọi $x \in \mathbb{R}^n$ và $x \neq 0$ thì

$$x^T A x > 0.$$

Chứng minh.

(Chiều $\Leftarrow$) Xét a là giá trị riêng bất kì của A và v là vector riêng tương ứng thì $0 < v^T A v = v^T(a v) = a\|v\|^2 \Rightarrow a > 0$.
(Chiều $\Rightarrow$) Gợi ý. x là tổ hợp tuyến tính của các vector riêng. □

Tính chất

Tính chất

Cho ma trận $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ thì ma trận $A^T A$ xác định dương.