

Biến ngẫu nhiên liên tục và phân phối

Nguyễn Mạc Nam Trung

PiMA 2021



Trình bày: Nguyễn Mạc Nam Trung, Đại học KHTN TpHCM

July 31, 2021

- 1 Biến ngẫu nhiên liên tục
 - Định nghĩa
 - Hàm phân phối xác suất
 - Đặc trưng
- 2 Một số phân phối liên tục
 - Phân phối đều
 - Phân phối chuẩn
 - Phân phối lũy thừa
- 3 Tổng kết

Contents

1 Biến ngẫu nhiên liên tục

■ Định nghĩa

■ Hàm phân phối xác suất

■ Đặc trưng

2 Một số phân phối liên tục

■ Phân phối đều

■ Phân phối chuẩn

■ Phân phối lũy thừa

3 Tổng kết



Nhắc lại khái niệm

Định nghĩa (Biến ngẫu nhiên liên tục)

Biến ngẫu nhiên X có miền giá trị là một đoạn trên trục số thực được gọi là liên tục.

Trong định nghĩa, ta có thể thay đoạn thành khoảng hoặc hợp của các khoảng, đoạn.



Ví dụ

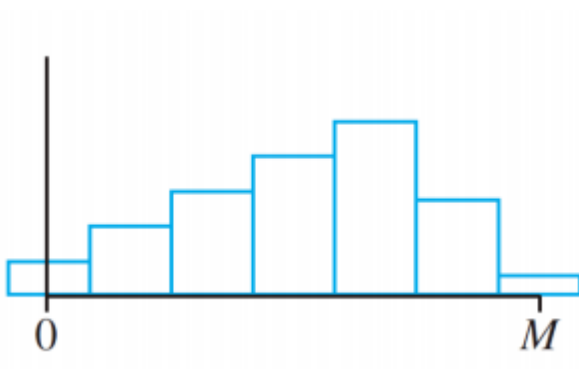
Ví dụ (Đo chiều sâu hồ nước)

Xét một hồ nước, người ta muốn đo chiều sâu của mặt hồ từ các điểm trên bề mặt hồ. Không gian mẫu $\Omega = [0, M]$.

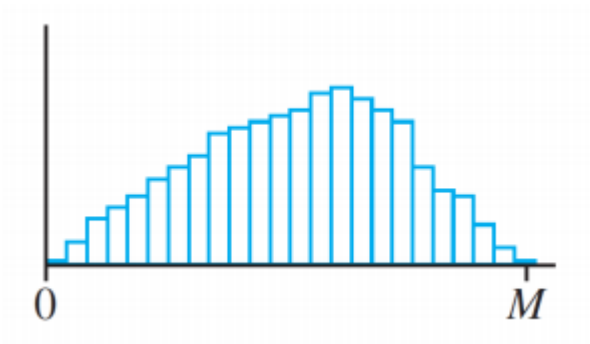
Ta quan tâm đến phân phối của chiều sâu của mặt hồ trên.



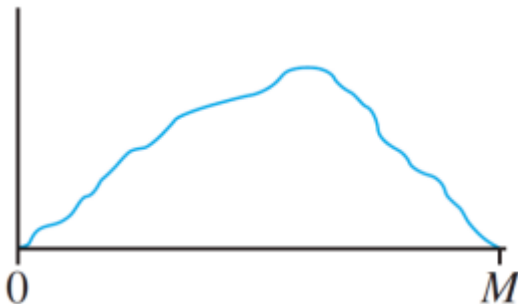
Ví dụ



Ví dụ



Ví dụ



Câu hỏi. Ta biết các điểm trên mặt hồ đều được đo vì vậy **tổng xác suất xảy ra các biến cố trong không gian mẫu** phải bằng 1. Phần nào trong hình vẽ thể hiện điều đó ?



Contents

1 Biến ngẫu nhiên liên tục

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

2 Một số phân phối liên tục

- Phân phối đều
- Phân phối chuẩn
- Phân phối lũy thừa

3 Tổng kết



Hàm mật độ xác suất – Định nghĩa

Định nghĩa (Hàm mật độ xác suất)

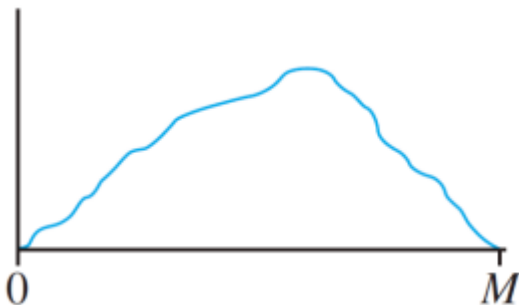
Hàm mật độ xác suất (probability density function – pdf) của biến ngẫu nhiên liên tục X , kí hiệu là f_X được định nghĩa như sau

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f_X(x) dx$$

với mọi $a \leq b$.



Minh họa



Hàm mật độ xác suất – Tính chất

Tính chất (Hàm mật độ xác suất)

Với f là hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X

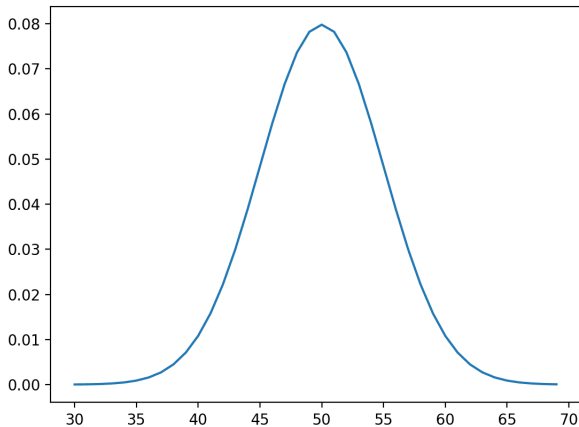
- $f(x) \geq 0$
- $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1.$
- $P(X = a) = 0$ với mọi $a \in \mathbb{R}.$

Cách tính tích phân suy rộng

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx &= \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx \\ &= \lim_{t \rightarrow -\infty} \int_t^a f(x)dx + \lim_{t \rightarrow \infty} \int_a^t f(x)dx. \end{aligned}$$



Minh họa



Hàm mật độ xác suất – Ví dụ

Ví dụ (Làm quen với hàm mật độ xác suất)

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}.$$

- 1 Tìm C .
- 2 Tính $P(X > 1)$.



Hàm mật độ xác suất – Ví dụ

Ví dụ (Làm quen với hàm mật độ xác suất)

Cho X là biến ngẫu nhiên liên tục có hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \begin{cases} C(4x - 2x^2) & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}.$$

1 Tìm C .

2 Tính $P(X > 1)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1 \Rightarrow \int_0^2 C(4x - 2x^2) dx = 1 \Rightarrow C = \frac{3}{8}.$$



Hàm mật độ xác suất – Ví dụ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases} .$$



Hàm mật độ xác suất – Ví dụ

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{8}(4x - 2x^2) & \text{nếu } 0 < x < 2 \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}.$$

$$P(X > 1) = \int_1^2 f(x)dx = \frac{1}{2}.$$



Hàm phân phối tích lũy – Định nghĩa

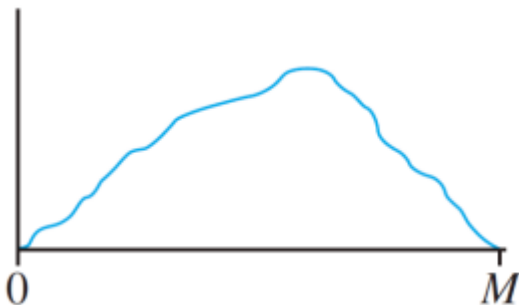
Định nghĩa (Hàm phân phối tích lũy)

Hàm phân phối tích lũy (cumulative distribution function – cdf) của biến ngẫu nhiên liên tục X , kí hiệu là F_X được định nghĩa như sau

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$



Minh họa



Hàm phân phối tích lũy – Tính chất

Tính chất (Hàm phân phối tích lũy)

Với F, f là hàm phân phối tích lũy và hàm mật độ xác suất của biến ngẫu nhiên liên tục X ,

- $F(a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx$ với mọi số thực a .
- $F'(x) = f(x)$ với mọi số thực x .



Hàm phân phối tích lũy – Ví dụ

Ví dụ (Làm quen với hàm phân phối tích lũy)

Cho biến ngẫu nhiên X liên tục có hàm phân phối tích lũy và hàm mật độ xác suất lần lượt là F_X , f_X . Tìm hàm mật độ xác suất của $Y = 2X$.



Hàm phân phối tích lũy – Ví dụ

Ví dụ (Làm quen với hàm phân phối tích lũy)

Cho biến ngẫu nhiên X liên tục có hàm phân phối tích lũy và hàm mật độ xác suất lần lượt là F_X , f_X . Tìm hàm mật độ xác suất của $Y = 2X$.

$$F_Y(a) = P(Y \leq a) = P(2X \leq a) = P(X \leq \frac{a}{2}) = F_X(\frac{a}{2}) \text{ suy ra}$$

$$f_Y(a) = \frac{1}{2}f_X(\frac{a}{2}).$$



Cách làm sau sai ở chỗ nào ?

$$f_Y(a) = P(Y = a) = P(2X = a) = P(X = \frac{a}{2}) = f_X(\frac{a}{2}).$$



Contents

1 Biến ngẫu nhiên liên tục

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

2 Một số phân phối liên tục

- Phân phối đều
- Phân phối chuẩn
- Phân phối lũy thừa

3 Tổng kết



Giá trị kì vọng – Định nghĩa

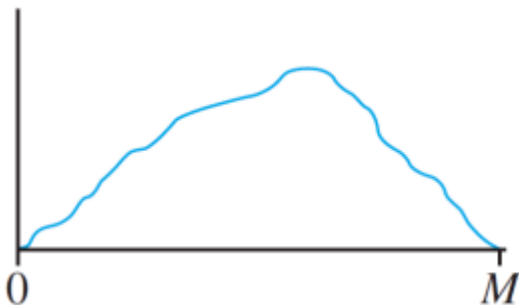
Định nghĩa (Giá trị kì vọng)

Giá trị kì vọng (expected value) của biến ngẫu nhiên liên tục X , kí hiệu là $E[X]$ hoặc μ , được định nghĩa như sau

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx.$$



Minh họa



Giá trị kì vọng – Tính chất

Tính chất (Giá trị kì vọng)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X và hàm số thực g . Khi đó,

$$E[g(X)] = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x).$$

Hệ quả (Giá trị kì vọng)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X và hàm số thực g . Khi đó,

$$E[aX + b] = aE[x] + b.$$



Phương sai – Định nghĩa

Định nghĩa (Phương sai)

Phương sai (variance) của biến ngẫu nhiên liên tục X , kí hiệu là $\text{Var}(X)$ hoặc σ^2 được định nghĩa như sau

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2] = E[X^2] - E[X]^2.$$



Phương sai – Tính chất

Tính chất (Phương sai)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X và hàm số thực g . Khi đó,

$$\text{Var}(g(X)) = E[(g(X) - E[g(X)])^2].$$

Hệ quả (Phương sai)

Cho biến ngẫu nhiên liên tục X . Với $a, b \in \mathbb{R}$,

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$



Contents

- 1 Biến ngẫu nhiên liên tục
 - Định nghĩa
 - Hàm phân phối xác suất
 - Đặc trưng
- 2 Một số phân phối liên tục
 - Phân phối đều
 - Phân phối chuẩn
 - Phân phối lũy thừa
- 3 Tổng kết



Phân phối đều

Định nghĩa (Phân phối đều)

Ta nói X có phân phối đều trên đoạn $[a, b]$, ký hiệu $X \sim U(a, b)$ nếu hàm mật độ xác suất của X là

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{nếu } x \in [a, b] \\ 0 & \text{trong trường hợp còn lại} \end{cases}.$$

Hàm phân phối tích lũy của X là

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{khi } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{khi } x \in [a, b] \\ 1 & \text{khi } x > b \end{cases}.$$



Ví dụ

Ví dụ (Xe buýt)

Vào 7 giờ, có xe buýt đến trạm PiMA. Sau mỗi 15 phút thì có một xe buýt đến trạm. Trung đến trạm PiMA vào một thời điểm nào đó trong khoảng từ 7 đến 7 giờ 30 phút. Tính xác suất Trung phải đợi nhiều hơn 10 phút.



Ví dụ

Ví dụ (Xe buýt)

Vào 7 giờ, có xe buýt đến trạm PiMA. Sau mỗi 15 phút thì có một xe buýt đến trạm. Trung đến trạm PiMA vào một thời điểm nào đó trong khoảng từ 7 đến 7 giờ 30 phút. Tính xác suất Trung phải đợi nhiều hơn 10 phút.

$$P(0 < X < 5) + P(20 < X < 25) = \frac{1}{30} \cdot 5 + \frac{1}{30} \cdot 5 = \frac{1}{3}.$$



Đặc trưng của phân phối đều

Đặc trưng (Phân phối đều)

Với $X \sim U(a, b)$ thì $E[X] = \frac{a+b}{2}$ và $\text{Var}(X) = \frac{(a-b)^2}{12}$.



Contents

- 1 Biến ngẫu nhiên liên tục
 - Định nghĩa
 - Hàm phân phối xác suất
 - Đặc trưng
- 2 Một số phân phối liên tục
 - Phân phối đều
 - Phân phối chuẩn
 - Phân phối lũy thừa
- 3 Tổng kết



Định nghĩa

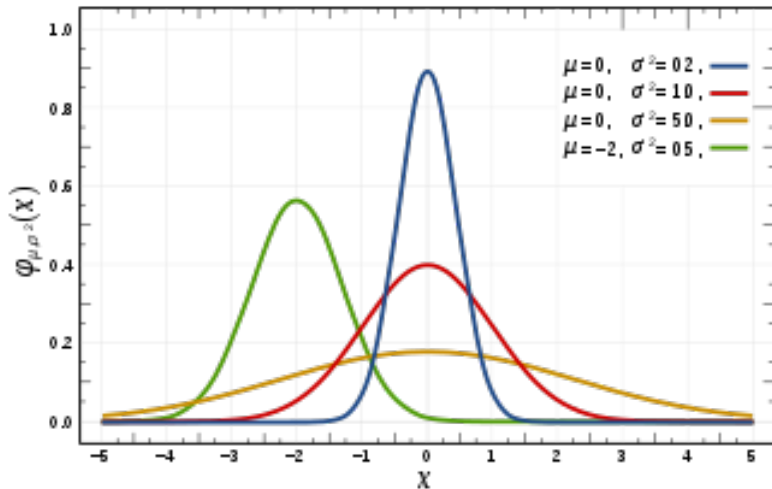
Định nghĩa (Phân phối chuẩn)

Một biến ngẫu nhiên liên tục X với hai tham số μ và $\sigma > 0$. X được gọi là có phân phối chuẩn, ký hiệu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ nếu hàm mật độ xác suất là

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$



Minh họa



Đặc trưng của phân phối chuẩn

Đặc trưng (Phân phối chuẩn)

Với $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ thì $E[X] = \mu$ và $\text{Var}(X) = \sigma^2$.



Contents

1 Biến ngẫu nhiên liên tục

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

2 Một số phân phối liên tục

- Phân phối đều
- Phân phối chuẩn
- Phân phối lũy thừa

3 Tổng kết



Định nghĩa

Định nghĩa (Phân phối lũy thừa)

Ta nói X có phân phối lũy thừa với tham số $\lambda > 0$, ký hiệu $X \sim \text{Exp}(\lambda)$, nếu hàm mật độ xác suất của X là

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & \text{nếu } x \geq 0 \\ 0 & \text{nếu } x < 0 \end{cases}.$$



Đặc trưng của phân phối lũy thừa

Đặc trưng (Phân phối lũy thừa)

Với $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ thì $E[X] = \frac{1}{\lambda}$ và $\text{Var}(X) = \frac{2}{\lambda^2}$.



Ví dụ

Ví dụ (Dịch vụ công cộng)

Giả sử thời gian một cuộc gọi theo phút là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối lũy thừa $\text{Exp}(0.1)$. Bạn định xài một dịch vụ điện thoại công cộng nhưng có người đến trước bạn. Xác suất để bạn phải đợi ít nhất 10 phút là bao nhiêu ?



Ví dụ

Ví dụ (Dịch vụ công cộng)

Giả sử thời gian một cuộc gọi theo phút là biến ngẫu nhiên tuân theo phân phối lũy thừa $\text{Exp}(0.1)$. Bạn định xài một dịch vụ điện thoại công cộng nhưng có người đến trước bạn. Xác suất để bạn phải đợi ít nhất 10 phút là bao nhiêu ?

Chú ý rằng $F(a) = P(X \leq a) = \int_0^a \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - e^{-\lambda a}$.

$$P(X \geq 10) = 1 - F(10) = \frac{1}{e} \approx 0.368.$$



Biến ngẫu nhiên

- Biến ngẫu nhiên là gì ?
- Phân biệt giữa biến ngẫu nhiên liên tục và rời rạc ?
- Các hàm phân phối xác suất của biến ngẫu nhiên có tên là gì, xác định như thế nào ?
- Đặc trưng của biến ngẫu nhiên là gì ?



Phân phối

- Nêu tên của các loại phân phối rời rạc.
- Nêu tên của các loại phân phối liên tục.
- Ý nghĩa của các loại phân phối đó.

