

# Biến ngẫu nhiên rời rạc và phân phối

Nguyễn Mạc Nam Trung

PiMA 2021



Trình bày: Nguyễn Mạc Nam Trung, Đại học KHTN TpHCM

July 31, 2021

## 1 Biến ngẫu nhiên

- Định nghĩa
- Phân loại

## 2 Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

## 3 Một số phân phối rời rạc

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối Poisson

# Contents

## 1 Biến ngẫu nhiên

- Định nghĩa
- Phân loại

## 2 Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

## 3 Một số phân phối rời rạc

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối Poisson



## Hai ví dụ mở đầu

### Ví dụ 1 (Hạng)

Sau khi hết một học kỳ, các bạn học sinh thường sẽ biết được **hạng** của mình trong lớp. Làm thế nào để xác định **hạng**?

### Ví dụ 2 (Độ nguy hiểm)

Làm thế nào để xác định **mức độ nguy hiểm** của một dịch bệnh?



# Biến ngẫu nhiên

Trong toán, ta thường muốn **định lượng** các kết quả quan sát. Khái niệm **biến ngẫu nhiên** ra đời như một quy tắc để liên hệ kết quả của một phép thử với một con số cụ thể.

## Định nghĩa (Biến ngẫu nhiên)

Biến ngẫu nhiên là một hàm thực hiện ánh xạ từ không gian mẫu đến tập hợp số thực.



# Ví dụ của biến ngẫu nhiên

## Ví dụ 1 (Tung đồng xu)

Tung một đồng xu. Không gian mẫu là  $\Omega = \{S, N\}$ . Định nghĩa biến ngẫu nhiên  $X$  như sau

$$X = \begin{cases} 0, & \text{nếu kết quả là mặt sấp} \\ 1, & \text{nếu kết quả là mặt ngửa} \end{cases}.$$

Ta cũng có thể viết  $X(S) = 0, X(N) = 1$ .



# Ví dụ của biến ngẫu nhiên

## Ví dụ 2 (Cờ cá ngựa)

Cờ cá ngựa là trò chơi gồm 4 người. Mỗi người tới lượt mình sẽ tung hai viên xúc xắc cân đối đồng chất, nếu hai mặt có cùng số hoặc một mặt ra 1, một mặt ra 6 thì được ra quân. Linh chơi cờ cá ngựa và tung xúc xắc cho đến khi được ra quân. Không gian mẫu là

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 6), (2, 2), (3, 3), \dots, (1, 2, 3, 4, 5, 5), \dots\}.$$

Định nghĩa biến ngẫu nhiên  $X$  là số lần Linh tung xúc xắc.



# Ví dụ của biến ngẫu nhiên

## Ví dụ 2 (Cờ cá ngựa)

Cờ cá ngựa là trò chơi gồm 4 người. Mỗi người tới lượt mình sẽ tung hai viên xúc xắc cân đối đồng chất, nếu hai mặt có cùng số hoặc một mặt ra 1, một mặt ra 6 thì được ra quân. Linh chơi cờ cá ngựa và tung xúc xắc cho đến khi được ra quân. Không gian mẫu là

$$\Omega = \{(1, 1), (1, 6), (2, 2), (3, 3), \dots, (1, 2, 3, 4, 5, 5), \dots\}.$$

Định nghĩa biến ngẫu nhiên  $X$  là số lần Linh tung xúc xắc.

**Câu hỏi.** Xác suất để  $X$  nhận giá trị là 1 là bao nhiêu ?





# Ký hiệu

Giả sử  $X$  là biến ngẫu nhiên đi từ không gian mẫu  $\Omega$  vào  $\mathbb{R}$ .

- Với  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(X = x) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$ .
- Với  $x \in \mathbb{R}$ ,  $(X \leq x) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\}$ .
- Với  $A \subset \mathbb{R}$ ,  $(X \in A) := \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$ .

Ở ví dụ 2, ta có thể viết

$$P(X = 1) = \frac{8}{36} = \frac{2}{9}.$$



# Ví dụ của biến ngẫu nhiên

## Ví dụ 3 (Làm project)

Thời gian làm project (tính theo ngày) của một bạn trại sinh PiMA là một biến ngẫu nhiên. Không gian mẫu là  $\Omega = [0, 7]$ .



# Ví dụ của biến ngẫu nhiên

## Ví dụ 3 (Làm project)

Thời gian làm project (tính theo ngày) của một bạn trại sinh PiMA là một biến ngẫu nhiên. Không gian mẫu là  $\Omega = [0, 7]$ .

**Câu hỏi.** Tính  $P(X = 3, 5)$ .



# Contents

## 1 Biến ngẫu nhiên

- Định nghĩa
- Phân loại

## 2 Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

## 3 Một số phân phối rời rạc

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối Poisson



# Phân loại

Có 2 loại là **biến ngẫu nhiên rời rạc** và **biến ngẫu nhiên liên tục**.

## Định nghĩa (Biến ngẫu nhiên rời rạc)

Biến ngẫu nhiên có miền giá trị là một tập hữu hạn hoặc **vô hạn đếm được** gọi là rời rạc.

## Định nghĩa (Biến ngẫu nhiên liên tục)

Biến ngẫu nhiên  $X$  có miền giá trị là một đoạn trên trục số thực được gọi là liên tục.



# Contents

## 1 Biến ngẫu nhiên

- Định nghĩa
- Phân loại

## 2 Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

## 3 Một số phân phối rời rạc

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối Poisson



# Giải thích khái niệm

## Định nghĩa (Tập vô hạn đếm được)

Một tập được gọi là vô hạn đếm được nếu có một song ánh đi từ tập đó vào tập số tự nhiên.

Ta cũng có thể nói, một tập vô hạn đếm được nếu ta có thể đánh số các phần tử của nó thành dãy vô hạn  $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$

## Lưu ý (Đoạn không đếm được)

Một đoạn không phải là một tập vô hạn đếm được.



# Contents

## 1 Biến ngẫu nhiên

- Định nghĩa
- Phân loại

## 2 Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

## 3 Một số phân phối rời rạc

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối Poisson





# Hàm khối xác suất – Định nghĩa

## Định nghĩa (Hàm khối xác suất)

Hàm khối xác suất (probability mass function – pmf) của biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ , kí hiệu là  $p_X$  được định nghĩa như sau

$$p_X(x) := P(X = x), \forall x \in \mathbb{R}.$$



# Hàm khối xác suất – Tính chất

## Tính chất (Hàm khối xác suất)

Với  $p$  là hàm khối xác suất của một biến ngẫu nhiên rời rạc,

- $p(x) > 0$  tại **quá lắm đếm được** giá trị  $x$ .
- $\sum p(x) = 1$ .

## Lưu ý (Chuỗi)

Ta có thể hiểu

$$\sum_{i=1}^{\infty} p(x_i) = 1 \iff s_n := \sum_{i=1}^n p(x_i) \rightarrow 1.$$



## Hàm khối xác suất – Ví dụ

### Ví dụ (Tung đồng xu)

Tung một đồng xu cân đối cho đến khi kết quả là mặt ngửa.

Gọi  $X$  là số lần tung cho đến khi dừng lại. Xác định hàm khối xác suất và kiểm tra tính chất.



# Hàm khối xác suất – Ví dụ

## Ví dụ (Tung đồng xu)

Tung một đồng xu cân đối cho đến khi kết quả là mặt ngửa. Gọi  $X$  là số lần tung cho đến khi dừng lại. Xác định hàm khối xác suất và kiểm tra tính chất.

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{2^x} & \text{nếu } x \in \mathbb{N}^* \\ 0 & \text{nếu } x \notin \mathbb{N}^* \end{cases}.$$

Tính chất 1 hiển nhiên còn tính chất 2 có thể suy ra được từ

$$s_n = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2^i} = 1 - \frac{1}{2^n} \rightarrow 1.$$



# Hàm phân phối tích lũy – Định nghĩa

## Định nghĩa (Hàm phân phối tích lũy)

Hàm phân phối tích lũy (cumulative distribution function – cdf) của biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ , kí hiệu là  $F_X$  được định nghĩa như sau

$$F_X(x) = P(X \leq x).$$



# Hàm phân phối tích lũy – Tính chất

## Tính chất (Hàm phân phối tích lũy)

Với  $F, p$  là hàm phân phối tích lũy và hàm khối xác suất của biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ ,

- $F(x) = \sum_{y \leq x} p(y)$  với mọi số thực  $x$ .

- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$  với các số thực  $a, b$  mà  $b > a$ .



# Contents

## 1 Biến ngẫu nhiên

- Định nghĩa
- Phân loại

## 2 Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

## 3 Một số phân phối rời rạc

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối Poisson



# Giá trị kì vọng – Định nghĩa

## Định nghĩa (Giá trị kì vọng)

Giá trị kì vọng (expected value) của biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ , kí hiệu là  $E[X]$  hoặc  $\mu$ , được định nghĩa như sau

$$E[X] = \sum x p(x).$$





## Giá trị kỳ vọng – Ví dụ

### Ví dụ (Xúc xắc của Trung)

Tung một viên xúc xắc với xác suất để ra mặt số 6 là 50% và xác suất để ra mặt thứ  $i$  là  $c(i - 1)$ . Giá trị kỳ vọng của kết quả là bao nhiêu ?



# Giá trị kì vọng – Ví dụ

## Ví dụ (Xúc xắc của Trung)

Tung một viên xúc xắc với xác suất để ra mặt số 6 là 50% và xác suất để ra mặt thứ  $i$  là  $c(i - 1)$ . Giá trị kỳ vọng của kết quả là bao nhiêu ?

Từ  $\sum p(x) = 1$  suy ra  $c = \frac{1}{20}$ . Từ đó, ta được

$$E[X] = \sum xp(x) = \frac{1}{20} \cdot 2 + \frac{2}{20} \cdot 3 + \frac{3}{20} \cdot 4 + \frac{4}{20} \cdot 5 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 5.$$



# Ký hiệu

Giả sử  $X$  là biến ngẫu nhiên đi từ không gian mẫu  $\Omega$  đến  $\mathbb{R}$ .  
Hàm số thực  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , ta định nghĩa

$$f(X) := f \circ X.$$

$f(X)$  là một biến ngẫu nhiên.



# Giá trị kì vọng – Tính chất

## Tính chất (Giá trị kì vọng)

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$  và hàm số thực  $f$ . Khi đó,

$$E[f(X)] = \sum f(x)p(x).$$

## Hệ quả (Giá trị kì vọng)

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ . Với  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$E[aX + b] = aE[X] + b.$$



# Phương sai – Định nghĩa

## Định nghĩa (Phương sai)

Phương sai (variance) của biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ , kí hiệu là  $\text{Var}(X)$  hoặc  $\sigma^2$  được định nghĩa như sau

$$\text{Var}(X) = E[(X - E[X])^2].$$



# Phương sai

Một cách tính khác của phương sai là

$$\begin{aligned}\text{Var}(X) &= E[(X - \mu)^2] \\ &= \sum (x - \mu)^2 p(x) \\ &= \sum x^2 p(x) - 2\mu \sum x p(x) + \mu^2 \sum p(x) \\ &= E[X^2] - E[X]^2\end{aligned}$$



## Phương sai – Ví dụ

Ví dụ (Tung xúc xắc)

Tung một viên xúc xắc cân đối. Tính phương sai của kết quả.



# Phương sai – Ví dụ

## Ví dụ (Tung xúc xắc)

Tung một viên xúc xắc cân đối. Tính phương sai của kết quả.

$$E[X] = \frac{1}{6}(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6) = \frac{7}{2}.$$

$$E[X^2] = \frac{1}{6}(1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{6}.$$

$$\text{Var}(X) = \frac{91}{6} - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{35}{12}.$$





# Phương sai – Tính chất

## Tính chất (Phương sai)

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$  và hàm số thực  $f$ . Khi đó,

$$\text{Var}(f(X)) = E[(f(X) - E[f(X)])^2].$$

## Hệ quả (Phương sai)

Cho biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$ . Với  $a, b \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X).$$



# Contents

## 1 Biến ngẫu nhiên

- Định nghĩa
- Phân loại

## 2 Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

## 3 Một số phân phối rời rạc

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối Poisson



# Biến ngẫu nhiên Bernoulli

Xét một thí nghiệm mà kết quả có thể chia làm hai loại là **thành công** và **thất bại**.

## Định nghĩa (Biến ngẫu nhiên Bernoulli)

Biến ngẫu nhiên  $X$  có giá trị bằng 1 nếu kết quả là thành công và bằng 0 nếu kết quả là thất bại được gọi là biến ngẫu nhiên Bernoulli.



# Phân phối Bernoulli

Hàm khối xác suất của  $X$  là

$$\begin{cases} p(1) = p \\ p(0) = 1 - p \\ p(x) = 0 \text{ với } x \notin \{0, 1\} \end{cases}$$

với  $p \in \{0, 1\}$ .

**Định nghĩa (Phân phối Bernoulli)**

Ta nói  $X$  có phân phối Bernoulli khi  $X$  có hàm khối xác suất như trên. Kí hiệu  $X \sim B(1, p)$ .



# Đặc trưng của phân phối Bernoulli

Đặc trưng (Phân phối Bernoulli)

Với  $X \sim B(1, p)$  thì  $E[X] = p$  và  $\text{Var}(X) = p(1 - p)$ .



# Ví dụ

## Ví dụ (Cờ cá ngựa)

Trong ví dụ về cờ cá ngựa, nếu ta xem việc được ra quân là thành công và không ra quân là thất bại. Xét  $X$  là biến ngẫu nhiên Bernoulli tương ứng. Tìm phân phối Bernoulli của  $X$ .



# Ví dụ

## Ví dụ (Cờ cá ngựa)

Trong ví dụ về cờ cá ngựa, nếu ta xem việc được ra quân là thành công và không ra quân là thất bại. Xét  $X$  là biến ngẫu nhiên Bernoulli tương ứng. Tìm phân phối Bernoulli của  $X$ .

$$X \sim B(1, \frac{2}{9}).$$



# Contents

## 1 Biến ngẫu nhiên

- Định nghĩa
- Phân loại

## 2 Biến ngẫu nhiên rời rạc

- Định nghĩa
- Hàm phân phối xác suất
- Đặc trưng

## 3 Một số phân phối rời rạc

- Phân phối Bernoulli
- Phân phối Poisson





# Định nghĩa

## Định nghĩa (Phân phối Poisson)

Một biến ngẫu nhiên rời rạc  $X$  nhận các giá trị  $0, 1, 2, \dots$  có phân phối Poisson tham số  $\lambda$ , nếu hàm khối xác suất của  $X$  là

$$p(x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, \forall x \in \mathbb{N}.$$

Kí hiệu  $X \sim P(\lambda)$ .



# Ví dụ

## Ví dụ (Typo)

Giả sử số lỗi đánh máy trong một trang của giáo trình PiMA là biến ngẫu nhiên phân phối Poisson tham số  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Xác suất để một trang có ít nhất một lỗi đánh máy là bao nhiêu ?



# Ví dụ

## Ví dụ (Typo)

Giả sử số lỗi đánh máy trong một trang của giáo trình PiMA là biến ngẫu nhiên phân phối Poisson tham số  $\lambda = \frac{1}{2}$ . Xác suất để một trang có ít nhất một lỗi đánh máy là bao nhiêu ?

$$P(X \geq 1) = 1 - p(0) = 1 - e^{-\frac{1}{2}} \approx 0.393.$$



# Đặc trưng của phân phối Poisson

## Đặc trưng

Với  $X \sim P(\lambda)$  thì  $E[X] = \lambda$  và  $\text{Var}(X) = \lambda$ .

