

Xác suất

PiMA 2021: The Mathematics of Data Science

Nguyễn Thị Minh Thư

Ngày 27 tháng 7 năm 2021



1. Phép thử, sự kiện và không gian mẫu
2. Các phép toán trên sự kiện
3. Xác suất

Phép thử, sự kiện và không gian mẫu



- Phép thử là một thí nghiệm, một quan sát hay một công việc mà kết quả của nó không đoán được.
- Tập hợp tất cả các kết quả có thể có của một phép thử được gọi là không gian mẫu. Kí hiệu là Ω
- Kết quả của phép thử là phần tử trong không gian mẫu.
- Biến cố là một tập hợp con của các kết quả trong không gian mẫu.



Ví dụ: Tung một viên xúc xắc cân đối. Phép thử cho ta biết có 6 khả năng có thể xảy ra: 1, 2, 3, 4, 5, 6. Không gian mẫu $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Một vài ví dụ của sự kiện:

$$A = \{2, 3, 4\}.$$

$$B = \{\text{số trên mặt của viên xúc xắc là số chẵn}\}$$

Các phép toán trên sự kiện



$$A = \{2, 3, 4\}.$$

$$B = \{\text{số trên mặt của viên xúc xắc là số chẵn}\}$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$A \cap B = \{2, 4\}$$

$$A^c = \{1, 5, 6\}$$



Tính giao hoán:

$$A \cup B = B \cup A$$

$$A \cap B = B \cap A$$

Tính kết hợp:

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

Tính phân phối:

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$



De Morgan's Law:

$$\left(\bigcup_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcap_{i=1}^n E_i^c$$

$$\left(\bigcap_{i=1}^n E_i \right)^c = \bigcup_{i=1}^n E_i^c$$



$$A = \{2, 3, 4\}.$$

$$B = \{\text{số trên mặt của viên xúc xắc là số chẵn}\}.$$

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$(A \cup B)^c = \{1, 5\}$$

$$A^c \cap B^c = \{1, 5\}$$

$$(A \cap B)^c = \{1, 3, 5, 6\}$$

$$A^c \cup B^c = \{1, 3, 5, 6\}$$



Nếu $A \cap B = \emptyset$, thì A và B được gọi là hai biến cố xung khắc.

Ví dụ: Tung một đồng xu cân đối. Cho A là biến cố đồng xu ra mặt ngửa và B là biến cố đồng xu ra mặt sấp.

$$\Rightarrow A \cap B = \emptyset$$

$\Rightarrow A$ và B là hai biến cố xung khắc.



Chọn một số thực dương ngẫu nhiên. Cho A là biến cố $x < 50$:

$A = \{x \mid x < 50\}$, B là biến cố $x > 38$: $B = \{x \mid x > 38\}$. Tìm:

- a. A^c
- b. B^c
- c. $A \cap B$
- d. $A \cup B$



Ta có $A = \{x \mid x < 50\}$ và $B = \{x \mid x > 38\}$

a. $A^c = \{x \mid x \geq 50\}$

b. $B^c = \{x \mid x \leq 38\}$

c. $A \cap B = \{x \mid 38 < x < 50\}$

d. $A \cup B = \{x \mid x > 0\} = \Omega$

Xác suất



Định nghĩa:

Cho một phép thử và không gian mẫu Ω . Lặp lại phép thử n lần với một biến cố A bất kì. Gọi $T(n, A)$ là số lần xảy ra biến cố A , khi đó tồn tại giới hạn

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{T(n, A)}{n}$$

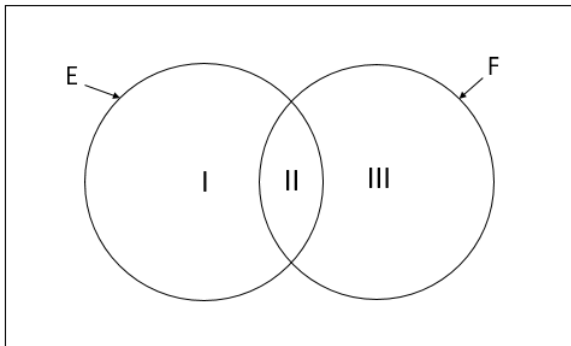
L được gọi là xác suất của A . Kí hiệu là $P(A)$.



- $0 \leq P(E) \leq 1$
- $P(\Omega) = 1$
- $P(E^c) = 1 - P(E)$
- Nếu $E \subset F$, thì $P(E) \leq P(F)$
- $P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = \sum_{i=1}^n P(E_i)$ nếu $E_i \cap E_j = \emptyset, i \neq j$



Thiết lập công thức từ biểu đồ Venn:



$$P(E \cup F) = P(E) + P(F) - P(E \cap F)$$



Công thức tổng quát:

$$\begin{aligned} P(E_1 \cup E_2 \cup \dots \cup E_n) = & \sum_{i=1}^n P(E_i) - \sum_{i_1 < i_2} P(E_{i_1} E_{i_2}) + \dots \\ & + (-1)^{r+1} \sum_{i_1 < i_2 < \dots < i_r} P(E_{i_1} E_{i_2} \dots E_{i_r}) \\ & + \dots + (-1)^{n+1} P(E_1 E_2 \dots E_n) \end{aligned}$$



Trong trại 2021, có 10% trại sinh thích màu xanh lá trên logo PiMA, 5% trại sinh thích màu đen, và 3% trại sinh thích cả màu xanh lá và đen. Chọn ngẫu nhiên một bạn trại sinh, tính xác suất để:

- Bạn trại sinh được chọn không thích màu xanh lá.
- Bạn trại sinh được chọn thích màu xanh lá nhưng không thích màu đen.
- Bạn trại sinh được chọn thích màu xanh lá hoặc màu đen.



Giải:

Đặt G là phần trăm số bạn trại sinh thích màu xanh lá và B là phần trăm số bạn trại sinh thích màu đen.

Ta có: $P(G) = 10\%$, $P(B) = 5\%$, và $P(G \cap B) = 3\%$

a. Xác suất bạn trại sinh được chọn không thích màu lá:

$$P(G^c) = 1 - P(G) = 1 - 10\% = 90\%$$



Giải:

$P(G) = 10\%$, $P(B) = 5\%$, và $P(G \cap B) = 3\%$

b. Xác suất bạn trại sinh được chọn thích màu xanh lá nhưng không thích màu đen:

$$P(G \cap B^c) = P(G) - P(G \cap B) = 10\% - 3\% = 7\%$$



Giải:

$P(G) = 10\%$, $P(B) = 5\%$, và $P(G \cap B) = 3\%$

c. Xác suất bạn trại sinh được chọn thích màu xanh lá hoặc màu đen:

$$P(G \cup B) = P(G) + P(B) - P(G \cap B) = 10\% + 5\% - 3\% = 12\%$$



- Giả sử A và B là 2 biến cố xung khắc, $P(A) = 0.3$ và $P(B) = 0.5$.
Tìm xác suất để:
 - A hoặc B xảy ra
 - A xảy ra nhưng B không xảy ra
 - A và B đều xảy ra
- Cho 2 biến cố A và B . Chứng minh: $P(A \cap B) \geq P(A) + P(B) - 1$, từ đó rút ra trường hợp tổng quát.
- Chứng minh công thức tổng quát của bao hàm và loại trừ.



Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis.

Introduction to Probability - 2nd Edition.

Athena Scientific, 2008.



Sheldon Ross.

A first course in probability - 8th Edition.

Pearson, 2009.



Sheldon M. Ross.

Introduction to Probability and Statistics for Engineers and Scientists - 3rd Edition.

Elsevier Academic Press, 2004.